

普通高等教育“十二五”规划教材  
电子信息科学与工程类专业规划教材

# 信号与系统

(第3版)

徐亚宁 苏启常 编著

電子工業出版社

**Publishing House of Electronics Industry**

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本教材以“易教易学和强化培养学生的工程能力和创新能力”为出发点,详细介绍了信号与系统分析的基本理论、基本方法,以及 MATLAB 在本课程中的典型应用。全书内容包括:绪论、连续时间信号与系统的时域分析、连续时间信号与系统的频域分析、连续时间信号与系统的复频域分析、离散时间信号与系统的时域分析、离散时间信号与系统的 $z$ 域分析、系统的状态变量分析及附录。各章配备了关键概念的小结、MATLAB 的应用、丰富的习题和上机练习。

本书力求精选内容、加强基础、例题典型、重点突出;在文字论述上力求简洁明了、易教易学;在结构安排上,理论与 MATLAB 应用并进。本书可作为高等学校电气信息类各专业的学生教材。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

## 图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/徐亚宁,苏启常编著. —3 版. —北京:电子工业出版社,2011.7

电子信息科学与工程类专业规划教材

ISBN 978-7-121-13539-2

I. ①信… II. ①徐… ②苏… III. ①信号系统—高等学校—教材 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 085053 号

责任编辑:韩同平 特约编辑:李佩乾

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编:100036

开 本:787×1092 1/16 印张:16.5 字数:450 千字

印 次:2011 年 7 月第 1 次印刷

印 数:4 000 册 定价:35.00 元

凡所购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn),盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线:(010)88258888。

# 前 言

本书第1版和第2版分别于2003年和2007年出版,教学使用效果良好,并获广西优秀教材一等奖。

这次的第3版,是在2010年6月教育部启动实施“卓越工程师教育培养计划”的背景下,以及进一步收集整理广大师生的反馈意见的基础上完成的。

本书力求精选内容、加强基础、例题典型、重点突出;在文字论述上力求简洁明了、易教易学;在结构安排上,理论与MATLAB应用并行,力求学生在学习信号与系统分析的基本理论和方法的同时,深入掌握MATLAB的应用,将大量繁杂数学运算用计算机实现,从而加深对信号与系统基本原理、方法及应用的深入理解,强化培养学生工程能力和创新能力。

第3版在保持第2版基本内容和结构不变的基础上,主要做了以下2个方面的修订:

首先对第2版在信号与系统的基本理论和方法的叙述方面进行了文字优化,将教师和学生反映不太好懂的地方进行了重新表述。

然后把主要精力放在MATLAB部分。对MATLAB基本知识一节进行了重新编写和组织,内容的选取和叙述方法使得学生更加简明易懂,更好地快速入门,为后面章节的应用打好基础。在MATLAB的应用方面,重新设计了大量的MATLAB例题,使得信号与系统理论的连续部分和离散部分的每个基本分析方法都与MATLAB应用更加相得益彰。书中所有MATLAB程序都重新经过运行,所有结果都与上机分析结果一致,以帮助学生在课后进一步理解相应理论知识,掌握计算机仿真的基本方法,了解相关理论在工程中的应用。同时,书中MATLAB例题的选取十分注意与课后上机练习相关,留给学生培养创新能力的机会。

对全书各章的习题做了精减,其中标“\*”的习题,难度较大,有精力的学生,可以选做。

本书由桂林电子科技大学徐亚宁、苏启常编著。第1、2、3、7章由徐亚宁编写;第4~6章,以及有关MATLAB的所有内容和上机练习由苏启常编写。

限于水平,书中难免仍有不妥或错误之处,恳请读者指正。

Email: xuyan@guet.edu.cn      suqch@guet.edu.cn

编著者



# 目 录

第 1 章 绪论 .....	(1)
1.1 信号与系统 .....	(1)
1.2 信号的描述与分类 .....	(2)
1.3 系统的描述与分类 .....	(4)
1.3.1 连续时间系统及其描述 .....	(4)
1.3.2 离散时间系统及其描述 .....	(6)
1.4 LTI 系统的特性 .....	(8)
1.5 信号与系统分析方法概述 .....	(10)
1.6 MATLAB 基本知识 .....	(11)
1.6.1 MATLAB 简介 .....	(11)
1.6.2 MATLAB 快速入门 .....	(12)
本章关键概念小结 .....	(16)
习题 .....	(16)
上机练习 .....	(17)
第 2 章 连续时间信号与系统的时域分析 .....	(18)
2.1 常用信号及信号的基本运算 .....	(18)
2.1.1 常用信号 .....	(18)
2.1.2 信号的基本运算 .....	(20)
2.2 单位阶跃信号和单位冲激信号 .....	(23)
2.2.1 单位阶跃信号 .....	(23)
2.2.2 单位冲激信号 .....	(24)
2.2.3 冲激信号与阶跃信号的关系 .....	(25)
2.2.4 冲激信号的性质 .....	(26)
2.3 连续系统的零输入响应 .....	(28)
2.4 冲激响应和阶跃响应 .....	(29)
2.5 连续系统的零状态响应——卷积积分 .....	(31)
2.5.1 卷积积分 .....	(31)
2.5.2 卷积积分的图解法 .....	(33)
2.5.3 卷积积分的性质 .....	(35)
2.6 连续系统的时域分析 .....	(40)
2.7 MATLAB 应用举例 .....	(42)
2.7.1 连续信号的 MATLAB 表示 .....	(42)
2.7.2 信号基本运算的 MATLAB 实现 .....	(43)
2.7.3 利用 MATLAB 进行系统的时域分析 .....	(43)
本章关键概念小结 .....	(46)

习题 .....	(47)
上机练习 .....	(52)
<b>第3章 连续时间信号与系统的频域分析</b> .....	<b>(53)</b>
3.1 周期信号的傅里叶级数分析 .....	(53)
3.1.1 三角函数形式的傅里叶级数 .....	(53)
3.1.2 指数形式的傅里叶级数 .....	(55)
3.1.3 周期信号频谱的特点 .....	(59)
3.2 非周期信号的傅里叶变换分析 .....	(59)
3.2.1 从傅里叶级数到傅里叶变换 .....	(59)
3.2.2 频谱函数 $F(j\omega)$ 的特性 .....	(61)
3.2.3 典型非周期信号的傅里叶变换 .....	(62)
3.3 傅里叶变换的性质 .....	(65)
3.3.1 线性特性 .....	(65)
3.3.2 对称特性 .....	(66)
3.3.3 时移特性 .....	(67)
3.3.4 频移特性 .....	(68)
3.3.5 时频展缩特性 .....	(69)
3.3.6 时域微分特性 .....	(70)
3.3.7 频域微分特性 .....	(71)
3.3.8 时域积分特性 .....	(71)
3.3.9 卷积特性(卷积定理) .....	(72)
3.3.10 能量定理(帕斯瓦尔定理) .....	(74)
3.4 周期信号的傅里叶变换 .....	(76)
3.4.1 一般周期信号的傅里叶变换 .....	(76)
3.4.2 周期信号的傅里叶级数与单脉冲信号的傅里叶变换 .....	(78)
3.5 连续时间系统的频域分析 .....	(79)
3.5.1 系统频域分析法 .....	(79)
3.5.2 系统频域分析法举例 .....	(80)
3.6 连续系统频域分析应用举例 .....	(83)
3.6.1 无失真传输系统 .....	(84)
3.6.2 理想低通滤波器 .....	(84)
3.6.3 调制与解调 .....	(85)
3.7 抽样及抽样定理 .....	(87)
3.7.1 信号的抽样 .....	(87)
3.7.2 时域抽样定理 .....	(89)
3.8 MATLAB 应用举例 .....	(91)
3.8.1 周期信号的分解与合成 .....	(91)
3.8.2 非周期信号频谱的 MATLAB 求解 .....	(93)
3.8.3 用 MATLAB 计算连续系统的频率响应 .....	(94)
本章关键概念小结 .....	(95)

习题 .....	(96)
上机练习 .....	(101)
<b>第4章 连续时间信号与系统的复频域分析</b> .....	<b>(102)</b>
4.1 拉普拉斯变换 .....	(102)
4.1.1 双边拉普拉斯变换 .....	(102)
4.1.2 双边拉普拉斯变换的收敛域 .....	(103)
4.1.3 单边拉普拉斯变换 .....	(106)
4.1.4 常用信号的拉普拉斯变换 .....	(106)
4.2 单边拉普拉斯变换的性质 .....	(107)
4.2.1 线性特性 .....	(107)
4.2.2 时移特性 .....	(108)
4.2.3 复频移( $s$ 域平移)特性 .....	(109)
4.2.4 尺度变换(时-复频展缩)特性 .....	(109)
4.2.5 卷积定理 .....	(109)
4.2.6 微分定理 .....	(111)
4.2.7 积分定理 .....	(112)
4.2.8 初值定理和终值定理 .....	(114)
4.3 拉普拉斯逆变换 .....	(116)
4.3.1 极点为实数且无重根 .....	(117)
4.3.2 极点为复数且无重根 .....	(118)
4.3.3 极点为多重极点 .....	(119)
4.4 连续时间系统的复频域分析 .....	(121)
4.4.1 微分方程的拉普拉斯变换求解 .....	(121)
4.4.2 电路网络的复频域模型分析法 .....	(124)
4.4.3 系统函数(转移函数) .....	(128)
4.5 系统特性与系统函数的关系 .....	(130)
4.5.1 系统的因果性 .....	(130)
4.5.2 系统的稳定性 .....	(130)
4.5.3 由系统函数 $H(s)$ 确定频率响应 .....	(132)
4.6 双边拉普拉斯变换 .....	(134)
4.6.1 双边拉普拉斯变换的特性 .....	(134)
4.6.2 系统函数与系统的稳定性 .....	(135)
4.6.3 双边拉普拉斯逆变换 .....	(135)
4.7 MATLAB 应用举例 .....	(137)
4.7.1 用 MATLAB 计算拉普拉斯正反变换 .....	(137)
4.7.2 利用 MATLAB 实现部分分式展开 .....	(138)
4.7.3 系统的零极点图 .....	(138)
本章关键概念小结 .....	(140)
习题 .....	(140)
上机练习 .....	(146)

第 5 章 离散时间信号与系统的时域分析 .....	(147)
5.1 离散时间信号与离散系统 .....	(147)
5.1.1 离散时间信号概述 .....	(147)
5.1.2 典型的离散信号 .....	(148)
5.1.3 离散信号的基本运算 .....	(149)
5.1.4 离散系统响应的求解方法 .....	(151)
5.2 离散系统的零输入响应 .....	(152)
5.3 离散系统的单位样值响应 .....	(154)
5.4 离散系统的零状态响应——卷积和 .....	(156)
5.4.1 卷积和 .....	(156)
5.4.2 卷积和的性质 .....	(157)
5.4.3 卷积和的计算 .....	(158)
5.5 离散系统响应的时域分析 .....	(161)
5.6 MATLAB 应用举例 .....	(164)
5.6.1 用 MATLAB 表示离散序列 .....	(164)
5.6.2 离散信号运算的 MATLAB 实现 .....	(165)
5.6.3 离散系统单位样值响应的求解 .....	(166)
5.6.4 离散系统零状态响应的求解 .....	(167)
本章关键概念小结 .....	(167)
习题 .....	(168)
上机练习 .....	(171)
第 6 章 离散时间信号与系统的 $z$ 域分析 .....	(172)
6.1 离散信号的 $z$ 变换 .....	(172)
6.1.1 $z$ 变换的定义 .....	(172)
6.1.2 $z$ 变换的收敛域 .....	(173)
6.1.3 常用离散信号的单边 $z$ 变换 .....	(176)
6.1.4 $z$ 平面与 $s$ 平面的映射关系 .....	(177)
6.2 $z$ 变换的基本性质 .....	(178)
6.2.1 线性特性 .....	(179)
6.2.2 移位特性 .....	(179)
6.2.3 尺度变换特性 .....	(180)
6.2.4 时间翻转特性 .....	(181)
6.2.5 $z$ 域微分(时域线性加权) .....	(181)
6.2.6 卷积定理 .....	(181)
6.2.7 初值定理和终值定理 .....	(182)
6.3 逆 $z$ 变换 .....	(184)
6.4 离散系统的 $z$ 域分析 .....	(186)
6.4.1 差分方程的变换解 .....	(186)
6.4.2 系统函数 .....	(187)
6.4.3 离散系统因果性、稳定性与 $H(z)$ 的关系 .....	(189)



6.4.4	应用双边 $z$ 变换分析离散系统举例	(189)
6.5	离散系统的频率响应	(190)
6.5.1	序列的傅里叶变换	(191)
6.5.2	离散系统的频率响应	(191)
6.5.3	离散系统的稳态响应	(192)
6.6	MATLAB 应用举例	(194)
6.6.1	利用 MATLAB 计算 $z$ 变换和逆 $z$ 变换	(194)
6.6.2	部分分式展开的 MATLAB 实现	(195)
6.6.3	利用 MATLAB 求解离散系统的频率响应	(195)
6.6.4	系统函数的零极点	(196)
	本章关键概念小结	(198)
	习题	(198)
	上机练习	(202)
第 7 章	系统的状态变量分析	(203)
7.1	系统的信号流图	(203)
7.1.1	信号流图	(203)
7.1.2	系统的信号流图模拟	(207)
7.2	系统的状态变量分析	(209)
7.2.1	状态和状态变量	(209)
7.2.2	连续系统的状态方程和输出方程	(210)
7.2.3	连续系统状态方程和输出方程的建立	(211)
7.2.4	连续系统状态方程和输出方程的求解	(216)
7.2.5	离散系统的状态方程和输出方程的建立	(218)
7.2.6	离散系统的状态方程和输出方程的求解	(219)
7.3	MATLAB 应用举例	(220)
7.3.1	系统状态方程和输出方程的建立	(220)
7.3.2	系统状态方程的求解	(222)
	本章关键概念小结	(224)
	习题	(224)
	上机练习	(229)
	部分习题答案	(230)
附录 A	部分分式展开	(244)
A.1	$F(s)$ 的 $D(s)$ 中都是单实根	(244)
A.2	$F(s)$ 的 $D(s)$ 中有重根	(244)
A.3	$F(s)$ 的 $D(s)$ 中有共轭复根	(245)
附录 B	卷积积分表	(246)
附录 C	常用周期信号的傅里叶系数表	(247)
附录 D	常用序列单、双边 $z$ 变换对	(248)
附录 E	常用信号的傅里叶变换及其频谱图	(249)
	参考文献	(252)

# 第 1 章 绪 论

## 内 容 提 要

本章介绍信号与系统的基本概念。内容包括:信号与系统的概念;信号的描述和分类;系统的描述和分类;LTI 系统的特性;信号与系统的分析方法概述等。

## 1.1 信号与系统

在人类认识和改造自然界的过程中都离不开获取自然界的信息。所谓信息,是指存在于客观世界的一种事物形象。千万年来,人类用自己的感觉器官从客观世界获取各种信息,如语言、文字、图像、声音、自然景物等。可以说,我们是生活在信息的海洋之中,因此获取信息的活动是人类最基本的活动之一。

信息和消息密切相关,所谓消息,是指用来表达信息的某种客观对象,如电报中的电文、电话中的声音,电视中的图像等都是消息。通常我们把欲传输的语言、图像、文字、数码等统称为信息。

很久以来,人类曾寻求各种方法来传递信息(消息)。从利用手势、声音、光这类非语言传播发展到语言传播,是人类信息传播史上的第一次革命;文字的出现,印刷术、纸张的发明和推广使用,是人类信息传播史上的第二次革命;第三次信息传播革命是与电磁波传播媒介联系在一起的,如电报、电话、无线电广播、电视乃至通信卫星等一系列现代电磁波传播媒介的发现,这是人类信息传播史上具有划时代意义的革命。可见,消息的传送一般不是直接的,而必须借助于一定形式的信号才便于传输和处理。所以,信号是指消息的表现形式,如电信号、光信号和声音信号等。本课程着重研究电信号的分析、传输和处理。由于信号是带有信息的某种物理量,这些物理量的变化包含着信息,因此更具体地将信号定义为带有信息的随时间变化的物理量。

为了实现某些特定的功能(如能量转换或处理信息),人们把若干个部件有机地组合成一个整体,这样的—个整体就是一个系统。所以,我们将系统定义为由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。如通信系统、控制系统、电力系统、机械系统等。系统的概念不仅适用于自然科学领域,还适用于社会科学领域。图 1-1 就是一个典型的通信系统示意图。

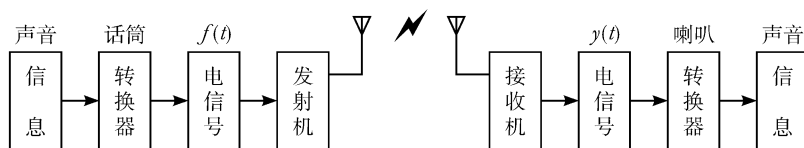


图 1-1 典型的通信系统

信号、电路与系统之间有着十分密切的联系。信号作为运载信息的工具,而电路或系统则作为传送信号或对信号进行加工处理的组合。所以,离开了信号,电路与系统将失去意义。再看电路与系统之间的区别。研究系统主要看它具有怎样的功能和特性,能否满足所给定的信号形式的传输和处理的要求;而研究电路问题主要研究电路结构和元件参数。系统问题注重全局,而电路问题则关心局部。所以,电路与系统之间的主要差异是处理问题的角度不同。近年来,由于大规模集成技术的发展,使电路与系统的区分很难明确。所以,在本书中,电路与系统二者通用。

## 1.2 信号的描述与分类

描述信号的基本方法是建立信号的数学模型,即写出信号的数学表达式。一般地,描述信号的数学表达式都以时间为变量,即数学表达式都是时间的函数,绘出函数的图像称为信号的波形。本书中信号的描述采用两种方法:函数表达式和波形。所以,在下面的叙述中,信号与函数两词不加区分。

按照信号的不同性质和数学特征,可以有多种不同的分类方法。下面的五种分类方法,是目前常用的方法。

### 1. 确定信号与随机信号

若信号被表示为一个确定的时间函数,对于指定的某一时刻,可确定一个相应的函数值,这种信号称为确定信号或规则信号。例如我们所熟知的正弦信号。

但是,实际传输的信号往往具有未可预知的不确定性,如果信号不是自变量(时间)的确定函数,即对某时刻 $t$ ,信号值并不确定,而只知道取某一数值的概率,此类具有统计规律的信号称为无规则信号或随机信号。无线信道中的干扰和噪声就是这类随机信号。

本书仅讨论确定信号。但应该指出,随机信号及其通过系统的研究,是以确定信号通过系统的理论为基础的。

### 2. 连续时间信号与离散时间信号

按照时间函数取值的连续性与离散性可将信号划分为连续时间信号与离散时间信号(简称连续信号与离散信号)。

如果在所考虑的时间区间内,除有限个间断点外,对于任意时间值都有确定的函数值与之对应,这样的信号称为连续信号,通常用 $f(t)$ 表示。例如

$$f_1(t) = 10\cos\pi t; \quad f_2(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

或可用波形表示连续信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ ,如图1-2所示。

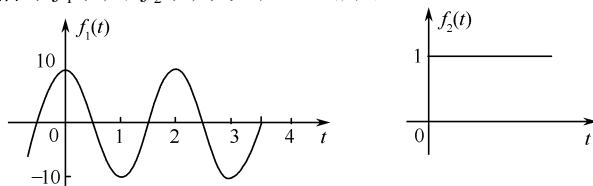


图 1-2 连续时间信号

实际上,连续信号就是函数的定义域是连续的。至于值域,可以是连续的,也可以不是。如果函数的定义域和值域都是连续的,则该信号称为模拟信号。但在实际应用中,模拟信号和连续信号两词往往不做区分。

如果只在某些不连续的时间瞬时才有确定的函数值对应,而在其他时间没有定义,这样的信号称为离散信号,通常用 $f(n)$ 表示。有定义的离散时间间隔可以是均匀的,也可以不均匀。一般都采用均匀间隔,将自变量用整数序号 $n$ 表示,即仅当 $n$ 为整数时 $f(n)$ 才有定义。例如

$$f_1(n) = \begin{cases} 0, & n \leq 0 \\ 1, & n = 1 \\ -1, & n = 2 \\ 0, & n > 2 \end{cases}; \quad f_2(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

或者可用波形表示离散信号 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ ,如图 1-3 所示。

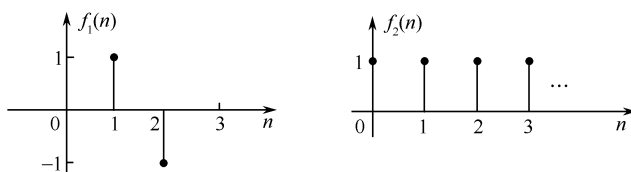


图 1-3 离散时间信号

同样,离散信号就是函数的定义域是离散的,只取规定的整数。若函数的值域也是离散的,则该信号称为数字信号。在理论分析中离散信号和数字信号往往也不予区分。

### 3. 周期信号与非周期信号

所谓周期信号就是依一定时间间隔周而复始,而且是无始无终的信号,以连续时间信号为例,它们的数学表达式满足

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

式中, $T$ 为信号的周期。只要给出此信号在任一周期内的变化过程,便可确知它在任一时刻的数值。

非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。若令周期信号的周期 $T$ 趋于无限大,则成为非周期信号。

### 4. 能量信号与功率信号

为了知道信号能量或功率的特性,常常研究信号 $f(t)$ (电流或电压)在 $1\Omega$ 电阻上所消耗的能量或功率。信号 $f(t)$ 在 $1\Omega$ 电阻上的瞬时功率为 $|f(t)|^2$ 。在时间间隔 $-T < t < T$ 内(这里 $T$ 不是周期)消耗的能量为

$$W = \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-1)$$

当 $T \rightarrow \infty$ 时,信号 $f(t)$ 的总能量为

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-2)$$

信号的平均功率为 
$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \quad (1-3)$$

由于被积函数是  $f(t)$  的绝对值的平方, 所以信号能量  $W$  和功率  $P$  都是非负实数, 即使  $f(t)$  是复函数也一样。

应用式(1-2)、式(1-3)计算信号在  $1\Omega$  电阻上的总能量及平均功率时, 可能有三种情况: 一种是总能量为有限值而平均功率为零, 即  $0 < W < \infty$  和  $P \rightarrow 0$ ; 另一种是总能量为无限大而平均功率为有限值, 即  $W \rightarrow \infty$  和  $0 < P < \infty$ ; 第三种是总能量和平均功率均为无限大, 即  $W \rightarrow \infty$  和  $P \rightarrow \infty$ 。通常把总能量有限的信号称为能量信号, 平均功率有限的信号称为功率信号。一般而言, 周期信号都是功率信号, 而非周期信号有的是能量信号, 有的是功率信号, 有的既不是能量信号也不是功率信号。任何信号不可能既是能量信号又是功率信号。

## 5. 一维信号与多维信号

从数学表达式来看, 信号可以表示为一个或多个变量的函数。语音信号可表示为声压随时间变化的函数, 这是一维信号, 而一张黑白图像每个点(像素)具有不同的光强度, 任一点又是二维平面坐标中的两个变量的函数, 这是二维信号。实际上还可能出现更多维数变量的信号, 例如电磁波在三维空间中传播, 若同时考虑时间变量就构成四维信号。在以后的讨论中, 一般情况下只研究一维信号, 且自变量为时间。

# 1.3 系统的描述与分类

从 1.1 节中我们知道, 系统与信号密切相关, 用图 1-4 说明二者之间的关系。

从外部引入系统的量称为输入信号或激励信号; 在输入信号作用下, 系统的响应称为输出信号。系统分析, 就是要找出输入信号和输出信号之间的关系。为此, 首先要对系统进行描述, 即要建立系统的数学模型, 然后用数学方法进行求解, 对所得结果进行物理解释, 并赋予物理含义。



图 1-4 信号与系统的关系

本书中对系统采用两种描述方法: 数学模型和模拟框图。由于连续时间系统和离散时间系统的两种描述方式有所不同, 在此不对系统的这两种描述方法进行详细叙述, 而放在 1.3.1 节和 1.3.2 节中详细介绍, 并作为本节的重点内容。

关于系统的分类, 也有许多划分方法。通常将系统分为: 连续时间系统与离散时间系统, 即时系统与动态系统, 集总参数系统与分布参数系统, 线性系统与非线性系统, 时变系统与时不变系统等。本书主要讨论线性时不变(Linear Time-Invariant, LTI)系统, 包括连续时间 LTI 系统和离散时间 LTI 系统。

## 1.3.1 连续时间系统及其描述

若系统的输入和输出都是连续信号, 则称该系统为连续时间系统, 简称为连续系统, 如图 1-5 所示, 图中  $f(t)$  是输入,  $y(t)$  是输出。

描述连续系统的方法有数学模型和模拟框图两种。下面举例说明这两种方法。

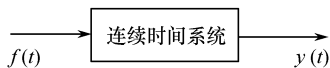


图 1-5 连续时间系统

【例 1-1】 图 1-6 所示 RC 电路,求电容 C 两端的电压  $y(t)$  与输入电压源的关系。

解:根据 KVL 及元件的伏安关系写出方程

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = f(t)$$

整理为

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}f(t)$$

这是一个一阶线性微分方程。

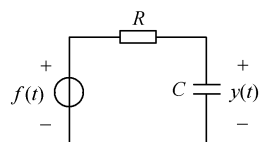


图 1-6 例 1-1 的图

【例 1-2】 图 1-7 所示电路,  $f(t)$  为激励电流源, 试写出响应电流  $i_1(t)$  和  $i_2(t)$  与激励的关系。

解:由 KCL 可得

$$i_1(t) + i_2(t) = f(t) \quad ①$$

由 KVL 及元件伏安关系得

$$Ri_1(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_2(\tau) d\tau \quad ②$$

将式②微分,再将式①代入并整理得

$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_1(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} f(t)$$

和

$$\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_2(t) = \frac{R}{L} \frac{df(t)}{dt}$$

可见,这是二阶线性微分方程。

一般而言,描述一个  $n$  阶线性连续系统,总可以用  $n$  阶线性微分方程描述,即

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) \\ & = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1f^{(1)}(t) + b_0f(t) \end{aligned} \quad (1-4)$$

其中,  $y(t)$  是所求的响应变量,  $f(t)$  是已知的激励变量,  $a_0 \sim a_{n-1}$ ,  $b_0 \sim b_m$  为常数。微分方程即为描述连续系统的数学模型。

除了利用微分方程描述连续系统之外,还可借助模拟框图(block diagram)描述,即用一些基本运算单元,如标量乘法器(倍乘器)、加法器、乘法器、微分器、积分器、延时器等,构成描述系统的模拟框图。表 1-1 给出了这些常用基本运算单元的符号及其各自的输入输出关系。

【例 1-3】 某连续系统的模拟框图如图 1-8 所示,写出该系统的微分方程。

表 1-1 常用的基本运算单元

运算单元	框图	输入输出关系
标量乘法器		$y(t) = af(t)$
微分器		$y(t) = \frac{d}{dt}f(t) = f'(t)$
积分器		$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$
延时器		$y(t) = f(t - \tau)$
加法器		$y(t) = f_1(t) + f_2(t)$
乘法器		$y(t) = f_1(t)f_2(t)$

**解:**系统的模拟框图中有两个积分器,所以描述该系统的是二阶微分方程。由积分器的输入输出关系可知,若输出设为  $y(t)$ ,则两个积分器的输入分别为  $y'(t)$  和  $y''(t)$ ,如图 1-8 中所示。从加法器的输出可得

$$y''(t) = -a_1 y'(t) - a_0 y(t) + f(t)$$

整理得

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

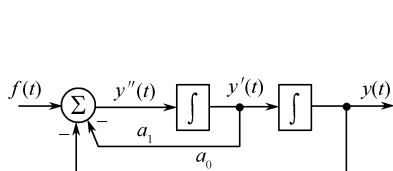


图 1-8 例 1-3 的图

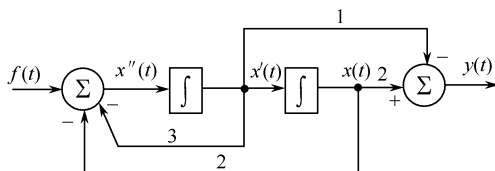


图 1-9 例 1-4 的图

**【例 1-4】** 描述某连续系统的模拟框图如图 1-9 所示,写出该系统的微分方程。

**解:**图 1-9 中含有两个积分器,仍然是二阶系统。因为响应  $y(t)$  不是积分器的输出,故设中间变量  $x(t)$ ,如图 1-9 所示。从加法器的输出可得

$$x''(t) = -3x'(t) - 2x(t) + f(t)$$

即

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = f(t) \quad (1)$$

和

$$y(t) = -x'(t) + 2x(t) \quad (2)$$

为求出响应  $y(t)$  与激励  $f(t)$  之间关系的微分方程,要消去中间变量  $x(t)$ 。由式②得

$$2y(t) = -2x'(t) + 4x(t)$$

$$3y'(t) = -3x''(t) + 6x'(t)$$

$$y''(t) = -x'''(t) + 2x''(t)$$

将以上三式相加得

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t)$$

$$= -[x''(t) + 3x'(t) + 2x(t)]' + 2[x''(t) + 3x'(t) + 2x(t)]$$

考虑式①有

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = -f'(t) + 2f(t)$$

### 1.3.2 离散时间系统及其描述

若系统的输入和输出都是离散信号,则称该系统为离散时间系统,简称离散系统,如图 1-10 所示,图中  $f(n)$  是输入(激励), $y(n)$  是输出(响应)。

描述离散系统的方法也有两种:数学模型和模拟框图。

下面就来讨论这两种描述方法。

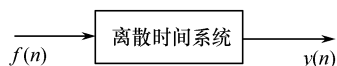


图 1-10 离散时间系统

**【例 1-5】** 某人从当月起每月初到银行存款  $f(n)$  (元),月息  $r=1\%$ 。设第  $n$  月初的总存款数为  $y(n)$  (元),试写出描述总存款数与月存款数关系的方程式。

**解:**第  $n$  月初的总存款数应由三项组成,即第  $n$  月初之前的总存款数  $y(n-1)$ 、第  $n$  月初存入的存款数  $f(n)$  和第  $n$  月初之前的利息  $ry(n-1)$ 。所以有

$$y(n) = (1+r)y(n-1) + f(n)$$

即

$$y(n) - (1.01)y(n-1) = f(n)$$

这是一个一阶常系数的差分方程。

事实上,一个  $N$  阶线性离散系统可以用  $N$  阶线性差分方程来描述。差分方程有前向差分方程和后向差分方程两种。 $N$  阶前向差分方程的一般形式为

$$\begin{aligned} & y(n+N) + a_{N-1}y(n+N-1) + \cdots + a_0y(n) \\ & = b_Mf(n+M) + b_{M-1}f(n+M-1) + \cdots + b_0f(n) \end{aligned} \quad (1-5)$$

$N$  阶后向差分方程的一般形式为

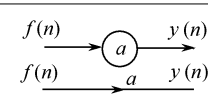
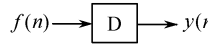
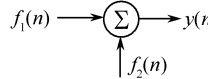
$$\begin{aligned} & y(n) + a_1y(n-1) + \cdots + a_Ny(n-N) \\ & = b_0f(n) + b_1f(n-1) + \cdots + b_Mf(n-M) \end{aligned} \quad (1-6)$$

式中,  $a_0 \sim a_N, b_0 \sim b_M$  都是常数。

后向差分方程和前向差分方程并无本质差异,用哪种方程描述离散系统都可以,但考虑到通常研究的 LTI 离散系统的输入、输出信号多为因果信号( $f(n)=0, y(n)=0, n<0$ ),故在系统分析中一般采用后向差分方程。差分方程即为描述离散系统的数学模型。

除了利用差分方程描述离散系统之外,还可以借助模拟框图描述。与描述连续系统相类似,也是用一些基本运算单元构成描述系统的模拟框图。表 1-2 给出了描述离散系统的基本运算单元及其输入、输出关系。

表 1-2 描述离散系统常用的基本运算单元

运算单元	框图	输入输出关系
标量乘法器		$y(n) = af(n)$
延迟单元		$y(n) = f(n-1)$
加法器		$y(n) = f_1(n) + f_2(n)$

【例 1-6】 某离散系统的模拟框图如图 1-11 所示,写出该系统的差分方程。

解:系统模拟框图中有两个延迟单元,所以该系统是二阶系统。由各运算单元的输入输出关系可知,若输出设为  $y(n)$ ,则图中两个延迟单元的输入分别为  $\frac{1}{6}y(n-1)$  和  $\frac{1}{6}y(n-2)$ 。从加法器的输出可得

$$\frac{1}{6}y(n) = -5 \times \frac{1}{6}y(n-1) - 4 \times \frac{1}{6}y(n-2) + f(n)$$

整理得

$$y(n) + 5y(n-1) + 4y(n-2) = 6f(n)$$

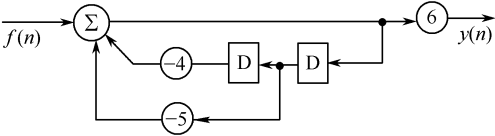


图 1-11 例 1-6 的图

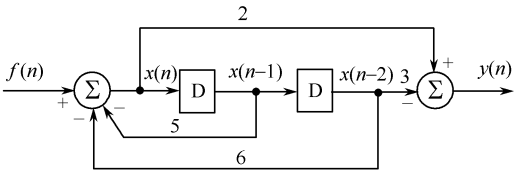


图 1-12 例 1-7 的图

【例 1-7】 某离散系统如图 1-12 所示,写出该系统的差分方程。

解:图 1-12 中含有两个延迟单元,所以该系统为二阶系统。设第一个加法器的输出为  $x(n)$ ,根据各单元的输入输出关系有

$$x(n) = -5x(n-1) - 6x(n-2) + f(n)$$



$$\text{即} \quad x(n) + 5x(n-1) + 6x(n-2) = f(n) \quad (1)$$

$$\text{和} \quad y(n) = 2x(n) - 3x(n-2) \quad (2)$$

为消去中间变量  $x(n)$  及  $x(n-1)$ ,  $x(n-2)$ , 由式②可得

$$5y(n-1) = 10x(n-1) - 15x(n-3) \quad (3)$$

$$6y(n-2) = 12x(n-2) - 18x(n-4) \quad (4)$$

将②, ③, ④三式相加得

$$\begin{aligned} & y(n) + 5y(n-1) + 6y(n-2) \\ &= 2[x(n) + 5x(n-1) + 6x(n-2)] - 3[x(n-2) + 5x(n-3) + 6x(n-4)] \end{aligned}$$

考虑到式①及其延迟, 可得

$$y(n) + 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2f(n) - 3f(n-2)$$

## 1.4 LTI 系统的特性

本书着重研究确定信号激励下集总参数线性时不变系统(LTI 系统)。为便于全书讨论, 下面将 LTI 系统的一些基本特性进行说明。这些 LTI 系统的特性, 既适用于连续 LTI 系统, 也适用于离散 LTI 系统。

### 1. 线性

线性性质包含两个内容: 齐次性和可加性。对于图 1-13 所示的一个 LTI 系统, 激励为  $f(t)$  或  $f(n)$ , 用  $f(\cdot)$  表示。响应为  $y(t)$  或  $y(n)$ , 用  $y(\cdot)$  表示, 则有

$$f(\cdot) \longrightarrow y(\cdot) \quad (1-7)$$

设  $a$  为任意常数, 若  $f(\cdot)$  增大  $a$  倍时, 其响应  $y(\cdot)$  也增大  $a$  倍, 即

$$a f(\cdot) \longrightarrow a y(\cdot) \quad (1-8)$$



图 1-13 LTI 系统

则称该系统是齐次的或均匀的, 具有齐次性。

若系统对于激励  $f_1(\cdot)$  与  $f_2(\cdot)$  之和的响应等于各个激励单独作用所引起的响应之和, 即

$$\text{若} \quad f_1(\cdot) \longrightarrow y_1(\cdot), \quad f_2(\cdot) \longrightarrow y_2(\cdot)$$

$$\text{有} \quad f_1(\cdot) + f_2(\cdot) \longrightarrow y(\cdot) = y_1(\cdot) + y_2(\cdot) \quad (1-9)$$

则称该系统是可加的, 具有可加性。

若系统既是齐次的, 又是可加的, 则称该系统是线性的, 具有线性特性, 即

$$a_1 f_1(\cdot) + a_2 f_2(\cdot) \longrightarrow a_1 y_1(\cdot) + a_2 y_2(\cdot) \quad (1-10)$$

【例 1-8】某连续系统的输入、输出关系为

$$y(t) = \frac{1}{12} f(t) - \frac{5}{6}$$

判断该系统是否是线性系统。

解: 设  $f_1(t) \longrightarrow y_1(t)$ ,  $f_2(t) \longrightarrow y_2(t)$ , 则有

$$y_1(t) = \frac{1}{12} f_1(t) - \frac{5}{6} \quad (1)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{12} f_2(t) - \frac{5}{6} \quad (2)$$

$$\text{将式①与式②相加得} \quad y_1(t) + y_2(t) = \frac{1}{12} [f_1(t) + f_2(t)] - \frac{10}{6} \quad \text{③}$$

而若激励为  $f_1(t) + f_2(t)$  时, 相应的响应为

$$y(t) = \frac{1}{12} [f_1(t) + f_2(t)] - \frac{5}{6} \quad \text{④}$$

可见, 式③与式④并不一致, 即

$$y(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$$

也就是该系统不满足可加性, 故该系统不是线性系统。

**【例 1-9】** 某离散系统的输入、输出关系为  $y(n) = n f(n)$ , 试判断该系统是否是线性系统。

**解:** 设  $f_1(n) \longrightarrow y_1(n)$ ,  $f_2(n) \longrightarrow y_2(n)$ ,  $f_1(n) + f_2(n) \longrightarrow y(n)$ , 则有

$$y_1(n) = n f_1(n) \quad \text{①}$$

$$y_2(n) = n f_2(n) \quad \text{②}$$

$$\text{将式①与式②相加得} \quad y_1(n) + y_2(n) = n [f_1(n) + f_2(n)] \quad \text{③}$$

$$\text{而} \quad y(n) = n [f_1(n) + f_2(n)] \quad \text{④}$$

可见式③与式④相等, 故该系统满足可加性。

$$\text{又因为} \quad a_1 f_1(n) \longrightarrow n \cdot a_1 f_1(n) = a_1 y_1(n)$$

$$a_2 f_2(n) \longrightarrow n \cdot a_2 f_2(n) = a_2 y_2(n)$$

所以该系统满足齐次性。故有

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) \longrightarrow a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$$

即该系统是线性系统。

## 2. 时不变性

如果系统的参数都是常数, 不随时间改变, 系统的零状态响应与激励施加的时刻无关。也就是说, 激励为  $f(\cdot)$  时产生的零状态响应为  $y_f(\cdot)$ ; 若激励延迟一定时间  $t_0(m)$  接入, 即为  $f(t - t_0)$  或  $f(n - m)$  时, 其响应也应延迟  $t_0(m)$ , 为  $y_f(t - t_0)$  或  $y_f(n - m)$ 。具有这种特性的系统称为时不变(或非时变)系统。反之, 称为时变系统。本书只讨论线性时不变系统, 我们所研究的系统的数学模型是常系数线性微分(或差分)方程。

**【例 1-10】** 一连续系统的系统方程(即输入、输出关系)为  $y(t) = t f(t) + 4$ ; 一离散系统的系统方程为  $y(n) = f^2(n)$ 。这两个系统是否是时不变的?

**解:** 对于连续系统, 设  $f_1(t) \longrightarrow y_1(t)$ , 则有

$$y_1(t) = t f_1(t) + 4$$

若激励为  $f_1(t - t_0)$  时, 设其响应为  $y(t)$ , 则有

$$y(t) = t f_1(t - t_0) + 4$$

若该系统是时不变的, 应该有

$$y(t) = y_1(t - t_0)$$

但从上式可知  $y(t) = t f_1(t - t_0) + 4 \neq (t - t_0) f_1(t - t_0) + 4$

即  $y(t) \neq y_1(t - t_0)$ , 故该连续系统是时变的, 不是时不变系统。

对于离散系统, 设  $f_1(n) \longrightarrow y_1(n)$ , 则有  $y_1(n) = f_1^2(n)$ 。

若激励为  $f_1(n-m)$  时,其响应为  $y(n)$ ,则有

$$y(n) = f_1^2(n-m)$$

显然

$$y(n) = y_1(n-m)$$

即有

$$f_1(n) \longrightarrow y_1(n)$$

$$f_1(n-m) \longrightarrow y_1(n-m)$$

所以,该系统为时不变系统。

对于线性时不变连续系统,除了具有线性特性和时不变特性之外,还具有微分特性,即对一 LTI 连续系统,其具有的微分特性为:

若

$$f(t) \longrightarrow y(t)$$

则有

$$\frac{d f(t)}{d t} \longrightarrow \frac{d y(t)}{d t} \quad (1-11)$$

### 3. 因果性

如果系统现在的输出只取决于现在或过去的输入,则称该系统为因果系统。反之,称为非因果系统。本书主要讨论因果系统。

**【例 1-11】** 若某连续系统的输入、输出关系为  $y(t) = f(t-2)$ ,试问该系统是否为因果系统?

**解:** 设在  $t_1$  时刻的输出为  $y(t_1)$ ,由输入、输出关系有  $y(t_1) = f(t_1-2)$ 。可见,  $y(t_1)$  只与  $t_1-2$  时的输入有关,即取决于输入的未来值,所以该系统是非因果系统。

**【例 1-12】** 若某离散系统的输入、输出关系为

$$y(n) = \frac{1}{3} f(n+1) + f(n) + f(n-1)$$

试问该系统是否为因果系统?

**解:** 从已知的输入、输出关系可知,在  $n=m$  时刻的输出  $y(m)$ ,取决于输入信号的一个未来值  $f(m+1)$ ,所以该系统为非因果系统。

### 4. 稳定性

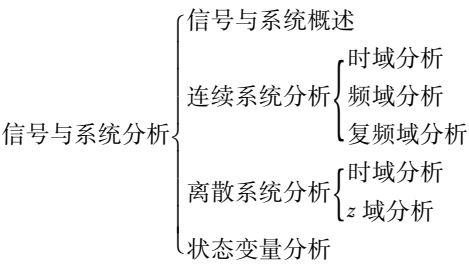
一个系统,若输入是有界的,其系统的输出也是有界的,则称该系统为稳定系统,该系统具有稳定性。有关系统稳定性的详细讨论,将在后续章节中进行。

## 1.5 信号与系统分析方法概述

系统分析的主要任务是通过求解给定系统在已知激励下的响应,分析系统具有的特性和功能。所以响应既与激励信号有关,又与系统有关。系统分析的过程离不开信号的分析。信号的分析包括信号的定义、性质、运算与变换、信号的分解等。系统分析方法有两大类:时域法和变换域法。时域法比较直观,直接分析时间变量的函数来研究系统的时域特性,将在第 2,5 章中详细讨论。变换域法是将信号与系统的时间变量函数变换成相应变换域中的某个变量函数,如第 3 章中讨论的频域分析是将时域函数

变换到以频率为变量的函数,利用傅里叶变换来研究系统的特性。第4章中讨论的复频域分析是将时域函数变换到以复变量为变量的函数,利用拉普拉斯变换来研究系统的特性。第6章中讨论的 $z$ 域分析是将时域函数变换到 $z$ 域中分析,利用 $z$ 变换来研究离散系统的特性。而对系统的数学模型,在时域中使用微分(或差分)方程,在变换域中便转换成代数方程。

需要指出的是,本章中对系统的描述使用了微分(或差分)方程,这种描述方法也叫输入-输出法或外部法,适用于单输入单输出系统。还有另外一种描述系统的方法叫状态变量法或内部法。本书主要研究输入-输出法,本书最后一章将介绍状态变量法。下面是本书的总的



# 1.6 MATLAB 基本知识

## 1.6.1 MATLAB 简介

MATLAB 的含义是 Matrix Laboratory —— 矩阵实验室,最初是为了方便矩阵的存取和运算而开发的软件包。经过几十年的扩充和完善,MATLAB 已经发展成为集科学计算、可视化与编程于一体的高性能的科学工程计算语言与编程环境,几乎成为各类科学研究和工程应用中的标准工具。

MATLAB 是一个交互的系统,输入一条命令,立即就可以得到该命令的运行结果。其基本数据元素是无须定义维数的矩阵(或数组),非常适合向量化编程。与其他编程语言相比,MATLAB 的语法更简单,更加贴近人的思维。用 MATLAB 编程,就犹如在草稿纸上列出数学公式进行演算那样简便、高效。因此,MATLAB 被视为“草稿纸式”的科学工程计算语言。MATLAB 的这些特性使之可以方便地解决大量的工程计算问题,尤其当问题中包含矩阵和矢量运算时,用 MATLAB 编程比用传统的非交互式标量语言编程,如 C、Fortran 等在编程上将耗费更少的时间和精力。

目前,MATLAB 在数值计算、信号处理、图像处理、自动控制、算法设计和通信仿真等众多领域都获得了广泛的应用。在美国的许多高校,MATLAB 甚至成为了数学、科学和工程类学科的标准的教学工具,是理工科学生必须掌握的编程语言之一。在工业上,MATLAB 也常被用做产品开发、算法分析和预研仿真的工具。

MATLAB 除了其基本的组件外,还附带了大量的专用工具箱(Toolbox),用于解决各种特定类别的问题。本书以 MATLAB 7.1 为基础,主要涉及其中的信号处理工具箱(Signal Processing Toolbox)和控制系统工具箱(Control System Toolbox)。

## 1.6.2 MATLAB 快速入门

### 1. MATLAB 的工作界面

MATLAB 第一次启动时,包含四个界面窗口,如图 1-14 所示。

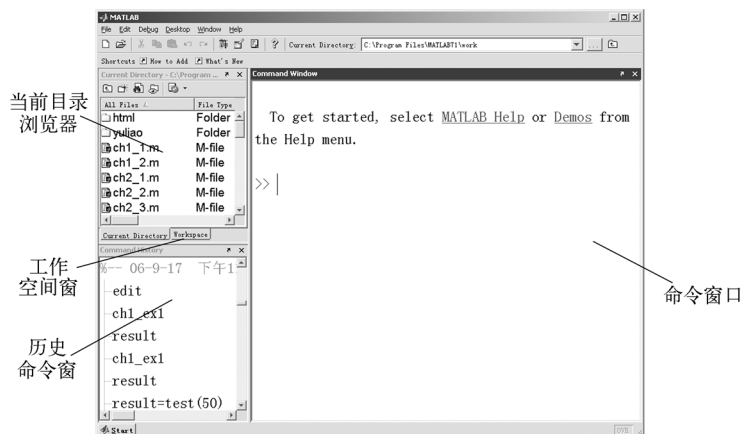


图 1-14 MATLAB 的工作界面

命令窗口 (Command Window): MATLAB 的主窗口,默认位于 MATLAB 桌面的右侧,用于输入命令、运行命令和程序,以及显示运行结果。

历史命令窗 (Command History): 位于 MATLAB 桌面的左下侧。用户在命令窗口中输入的所有命令均自动保存在历史命令窗中,需要时可以将这些命令重新调出进行编辑、执行,为用户多次使用同一条命令提供方便。

当前目录浏览器 (Current Directory): 位于 MATLAB 桌面的左上侧,默认为前台展示。该窗口用于显示当前的工作目录及目录中所包含的内容。当前目录可根据需要进行更改。

工作空间窗 (Workspace): 默认位于 MATLAB 桌面左上侧的后台。可以通过单击中间的“Workspace”按钮使之在前台展现。在命令窗口中运行命令、程序所生成的变量均保存在工作空间中,需要时可以双击变量名进行查看。

### 2. 命令窗口及其基本操作

在命令窗口中可以输入一条命令、表达式、变量名或文件名,回车后 MATLAB 即执行运算并可以显示运行结果。例如要计算“ $3 \times 4 + 2$ ”,在命令窗口的提示符“>>”之后输入“ $3 * 4 + 2$ ”,回车后 MATLAB 将执行计算,同时把结果赋给系统的默认变量 `ans` 并显示出来。如果输入的是“`x = 3 * 4 + 2`”,则 MATLAB 将计算结果赋给变量 `x`。以上两种输入方式及结果为:

```
>> 3 * 4 + 2          >> x = 3 * 4 + 2
ans =                 x =
    14                 14
```

如果在表达式的末尾加上分号“;”,则计算结果不会显示在命令窗口中,要知道计算结果可以在变量空间中查看或者在命令窗口中键入该变量名并回车:

```
>> x = 3 * 4 + 2;  
>> x  
x =  
14
```

MATLAB 的基本变量是矩阵形式的,即便是标量,MATLAB 也将之视为  $1 \times 1$  的矩阵。要在 MATLAB 的命令窗口中输入一个矩阵,例如,输入一个  $3 \times 3$  的矩阵,可以按照以下两种方式输入:

```
>> x = [1 2 3;4 5 6;7 8 9];  
或 >> x = [1 2 3  
4 5 6  
7 8 9]
```

以上两种输入方式的效果是一样的。矩阵的所有元素放在一对中括号 “[ ]” 内,矩阵每一行的各个元素之间用空格或者逗号“,”隔开,而不同的行以分号“;”或回车来分隔。命令末尾的分号“;”用于禁止显示该命令的执行结果。

除了变量和数学计算式外,在命令窗口中键入 M 文件名(M 文件是用 MATLAB 语言编写的程序,将在后面介绍)后回车,MATLAB 将运行该文件。

MATLAB 提供了方便实用的功能键,用于编辑、修改命令窗口中当前或以前输入的命令行。Windows 系统下这些功能键如表 1-3 所示。

表 1-3 命令窗口常用的功能键

功 能 键	功 能	功 能 键	功 能
↑	重新调入上一命令行	End	光标移到行尾
↓	重新调入下一命令行	Ctrl + Home	光标移到命令窗顶部
←	光标左移一个字符	Ctrl + End	光标移到命令窗底部
→	光标右移一个字符	Esc	清除命令行
Ctrl + ←	光标左移一个字	Delete	删除光标处字符
Ctrl + →	光标右移一个字	Backspace	删除光标处左边字符
Home	光标移到行首		

3. MATLAB 的帮助系统

MATLAB 提供了强大而完善的帮助系统,包括命令行帮助、联机帮助和演示帮助。要掌握 MATLAB,必须学会充分利用其帮助系统,尤其是命令行帮助功能。命令行帮助可以通过 help 命令获得,其格式是

```
help  
或 help 目录名/命令名/函数名/主题名/符号
```

第一种格式在命令窗口直接输入 help,不带任何参数,此时,命令窗将显示 MATLAB 的分类目录和对目录内容的简要说明,如下面所示:

```
>> help
HELP topics
matlab\general      - General purpose commands.
matlab\ops          - Operators and special characters.
matlab\lang         - Programming language constructs.
matlab\elmat        - Elementary matrices and matrix manipulation.
matlab\elfun        - Elementary math functions.
matlab\specfun      - Specialized math functions.
matlab\matfun       - Matrix functions - numerical linear algebra.
matlab\datafun      - Data analysis and Fourier transforms.
matlab\polyfun      - Interpolation and polynomials.
matlab\funfun       - Function functions and ODE solvers.
matlab\sparfun      - Sparse matrices.
matlab\scribe       - Annotation and Plot Editing.
:
```

第二种格式可以显示具体目录所包含的命令和函数,或者具体的命令、函数、符号或某个主题的详细帮助信息。例如,在命令窗口中键入

```
help sin
```

将会显示关于正弦函数(sin)的详细帮助信息,如下面所示。

```
>> help sin
SIN      Sine of argument in radians.
        SIN(X) is the sine of the elements of X.
        See also asin, sind.
        Overloaded functions or methods (ones with the same name in other directories)
        help sym/sin.m
        Reference page in Help browser
doc sin
```

此外,可以用 Demo 命令演示 MATLAB 的使用实例,或者通过访问命令窗口的 Help 菜单中的各菜单项获得联机帮助。

#### 4. MATLAB 的搜索路径

MATLAB 程序运行时,将按照事先设定的搜索路径来寻找该程序(即 M 文件)。如果所运行的 M 文件不在搜索路径中,则该文件对 MATLAB 是“不可见的”,文件就无法运行,此时命令窗口会显示相应的出错信息。利用 MATLAB 主界面“File”菜单中的“Set Path”项可以将需要的目录或文件夹添加到 MATLAB 的搜索路径中,添加后目录中的 M 文件对 MATLAB 就是“可见的”,在命令窗口中就可以运行了。

#### 5. M 脚本文件和 M 函数文件

MATLAB 有两种运行方式,即命令行运行方式和 M 文件运行方式。对一些简单的功能,

如简单的计算或绘图,因为输入的语句不多,用户可以采用命令行方式。即在命令窗口中逐行输入命令并回车。但是如果要实现比较复杂的功能,往往需要很多条语句,且需要经常修改其中的参数或者多次调用,这就需要采用 M 文件方式。简单地讲,这种方式就是用 MATLAB 语言编写程序,编好后运行该程序。这种程序的扩展名为“.m”,通常称为 M 文件。

M 文件可以用 MATLAB 自带的 M 文件编辑器或其他文本编辑器进行录入、编辑。从形式上来讲,M 文件可以分为 M 脚本(M script)文件和 M 函数(M function)文件两类。M 脚本文件就是一系列 MATLAB 语句的罗列、组合。运行 M 脚本文件时,MATLAB 依次执行文件中的每一行语句。这种方式与操作系统中批处理文件的运行方式相似。M 函数文件与 M 脚本文件的主要区别在于格式的不同:M 函数文件第一行为函数定义行,以关键字“function”(通常为蓝色字体)开头,而 M 脚本文件无此定义行。M 函数文件定义行的一般格式如下:

```
function [y1,y2,y3,...] = myfun(x1,x2,x3,...)
```

即定义行由关键字 function,输出变量 y1,y2,y3,...,函数名 myfun 和输入变量 x1,x2,x3,...四部分组成。其中关键字和函数名不能省略,而输入变量和输出变量可以有多个,也可以一个都没有。没有输入和输出变量时,中括号[]、等号 = 和括号()均可以省略。

**【例 1-13】** 编写 M 文件,求  $1+2+3+\cdots+50$ 。

用 M 脚本文件实现,程序如下:

```
n=50;
result = sum(1:n);    % 函数 sum 将数组中的所有元素相加
```

打开 M 文件编辑器,输入上述两行代码(% 号后面是程序的注释),将该程序保存为 cumaddm.m,得到的即为一个 M 脚本文件。要运行该程序,只要在命令窗口中键入文件名 cumaddm(注意不带扩展名.m)并回车即可。程序运行后,求和结果放在变量 result 中。在工作空间窗中双击变量 result 或在命令窗中键入 result 并回车即可查看结果:

```
>> cumaddm;
>> result
result =
    1275
```

如果要实现 1 到任意正整数  $n$  的连加,用上述 M 脚本文件,每次运行前都要修改  $n$  的值,很不方便。这种情况下适合采用 M 函数文件来实现。具体的代码如下

```
function y = cumaddf(n)
y = sum(1:n);
```

在 M 文件编辑器中输入上述两行代码,并保存为 cumaddf.m,得到的即为一个 M 函数文件。这时,在命令窗中按如下方式调用该函数,即可得到和第一种方式相同的结果。

```
>> result = cumaddf(50)
result =
    1275
```

此时,如果想求 1 到 100 的连加,只需在调用函数 cumaddf 时改变输入变量  $n$  即可:



```
>> result = cumaddf(100)
result =
    5050
```

## 本章关键概念小结

- 信号是带有信息的随时间变化的物理量。
- 系统是由若干个相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。
- 信号的描述方式有数学表达式和波形。
- 连续系统的数学模型是微分方程。
- 离散系统的数学模型是差分方程。
- 系统的描述方式有数学模型和模拟框图。
- 线性系统具有齐次性和可加性。
- 时不变系统是指当输入延迟一定时间,输出也延迟相同时间。
- 因果系统的输出仅依赖于过去和现在的输入。
- 线性时不变系统(LTI 系统)的系统方程是常系数线性方程。
- 系统的阶数是系统方程的微分(或差分)的阶数;或是模拟框图的积分器(或延迟单元)的个数。

## 习题

1.1 什么是因果信号?什么是因果系统?

1.2 什么是时域分析?什么是变换域分析?

1.3 什么是系统的数学模型?线性时不变连续系统的数学模型是什么?

1.4 关于信号的确定性与随机性有以下几种说法,试判断正误。

(1) 有确定函数表达式的信号为确定信号;而随机信号没有确定函数表达式。

(2) 已经知道的信号为确定信号;未知信号为随机信号。

(3) 能够确定未来任意时刻  $t$  的信号取值的信号为确定信号;而对于未来任意时刻  $t$ ,其取值不能确定的信号为随机信号。

(4) 确定信号可由确定的函数表达式来表示;随机信号由概率分布函数来描述。

1.5 填空题

(1) 时间连续,信号取值也连续的信号为\_\_\_\_\_信号。

(2) 时间连续,信号取值离散的信号为\_\_\_\_\_信号。

(3) 时间离散,信号取值连续的信号为\_\_\_\_\_信号。

(4) 时间离散,信号取值也离散的信号为\_\_\_\_\_信号。

1.6 试判断下列信号的确定性(随机性)、连续性(离散性)、周期性(非周期性)。

(1)  $f(n) = \cos n\pi$  (2)  $f(n) = \cos n$  (3)  $f(t) = \cos 2t$  (4)  $f(n) = \cos \frac{n}{12}\pi$  (5)  $f(t) = t^2 + 1$

(6) 掷硬币实验,设硬币“出现正面”则发出信号“0”,“出现反面”则发出信号“1”。

(7) 设天气预报分为晴、阴、雨、雪四种情况,分别用四种电信号来表示,并已知其出现的概率分别为

0.6, 0.3, 0.2, 0.1, 则对接收者来说此信号为以上哪种信号?

1.7 关于系统有如下几种说法,试判断正误并举例说明。

- (1) 由常系数微分方程描述的系统为时不变系统,由变系数微分方程描述的系统为时变系统;
- (2) 线性系统一定是时不变系统,反之亦然;
- (3) 线性时不变系统一定是因果系统;
- (4) 激励与响应成正比的系统为线性系统;
- (5) 只有同时满足零输入线性和零状态线性的系统才是线性系统;
- (6) 线性时不变系统的输入增大一倍,则响应也增大一倍。

1.8\* 系统的数学模型如下,试判断其线性性、时变性和因果性。其中  $X(0^-)$  为系统的初始状态。

- (1)  $y(t) = X(0^-) + 2t^2 f(t)$
- (2)  $y(t) = e^{2f(t)}$
- (3)  $y(t) = f'(t)$
- (4)  $y(t) = f(t-2) + f(1-t)$
- (5)  $y(t) = f(t) \cos 2t$
- (6)  $y(t) = [f(t) + f(t-2)] U(t)$
- (7)  $y(t) = \cos[f(t)] U(t)$
- (8)  $y(t) = f(2t)$
- (9)  $y(t) = [f(t)]^2$
- (10)  $y(t) = \int_{-\infty}^{5t} f(\tau) d\tau$

## 上机练习

1.1 在命令窗口中计算:  $(3^2 \times 4 - \frac{1}{2} + 0.8) \div 4$ 。要求:

- (1) 计算结果显示在命令窗口中;
- (2) 计算结果不显示在命令窗口中;
- (3) 在不全部重新输入的情况下,将算式修改为:  $(3^2 \times 4 - \frac{1}{2} + 0.65) \div 4$ , 并计算。

1.2 用 help 命令查看函数 plot 的用法并据此回答下列问题:

- (1) plot 函数中两个输入变量 X 和 Y 分别代表什么? 它们是标量、向量还是矩阵?
- (2) 用 plot 绘图时,能否指定线型和颜色? 如何指定?
- (3) 用 plot 能否将多条曲线同时画在一个坐标系内? 命令格式是什么?

1.3 用 help 命令查看以下几个函数的功能和用法: cos, axis, xlabel, ylabel, title, text, legend。

1.4 写一个 M 脚本文件,完成以下工作:在同一个坐标系中画出  $\sin \frac{\pi}{2}t$  和  $\cos 2t$  在  $[0, \pi]$  区间的波形。

要求:

- (1) 横坐标显示范围为  $-0.2 \sim 3.5$ ,纵坐标显示范围为  $-1.1 \sim 1.1$ ;横坐标标注为  $t$ ,纵坐标标注为  $y$ ;
- (2) 两条曲线用不同线型画出,并进行标注。(提示:用上机练习 3 的函数)

1.5 写一个 M 函数文件,实现以下功能:对数组元素进行从大到小排序后输出并求出数组的最大元素及其在原数组中的位置。(提示:利用函数 sort 和 max)

1.6 将上机练习 4 和上机练习 5 的两个 M 文件保存在“d:\myfile”中,将该目录添加到 MATLAB 的搜索路径当中,然后在命令窗口中运行这两个文件。

# 第2章 连续时间信号与系统的时域分析

## 内 容 提 要

本章首先介绍连续信号的时域特性,包括常用信号的定义、性质、基本运算和变换。然后介绍连续系统时域分析方法,包括零输入响应和零状态响应的求解方法。

## 2.1 常用信号及信号的基本运算

### 2.1.1 常用信号

#### 1. 实指数信号

实指数信号的表达式为

$$f(t) = Ke^{at} \quad (2-1)$$

式中, $a$  和  $K$  为实数。若  $a > 0$ , 信号将随时间而增长; 若  $a < 0$ , 信号则随时间衰减; 在  $a = 0$  的特殊情况下, 信号不随时间而变化, 成为直流信号。常数  $K$  表示指数信号在  $t = 0$  点的初始值。 $K > 0$  时实指数信号的波形如图 2-1 所示。

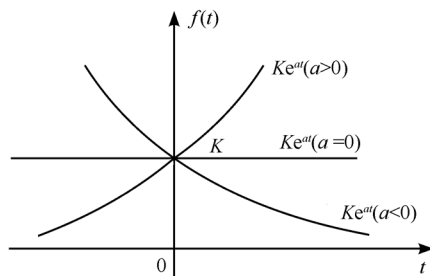


图 2-1 实指数信号

指数  $a$  的绝对值大小反映了信号增长或衰减的速率,  $|a|$  越大, 增长或衰减的速率越快。通常, 把

$|a|$  的倒数称为实指数信号的时间常数, 记做  $\tau$ , 即  $\tau = \frac{1}{|a|}$ ,  $\tau$  越大, 实指数信号增长或衰减的速率越慢。

#### 2. 正弦信号

正弦信号和余弦信号二者仅在相位上相差  $\pi/2$ , 通常统称为正弦信号, 一般写做

$$f(t) = K\sin(\omega t + \theta) \quad (2-2)$$

式中,  $K$  为振幅,  $\omega$  为角频率,  $\theta$  为初相位, 其波形如图 2-2 所示。

正弦信号是周期信号, 其周期  $T$  与角频率  $\omega$  和频率  $f$  满足

$$T = 2\pi/\omega = 1/f$$

在信号与系统分析中, 有时要遇到衰减的正弦信号, 波形如图 2-3 所示。此正弦振荡的幅度按指数规律衰减, 其表达式为

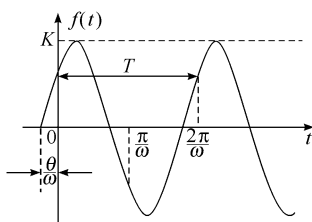


图 2-2 正弦信号

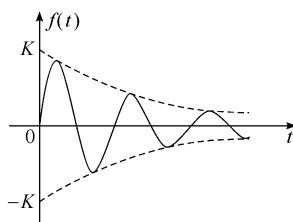


图 2-3 指数衰减的正弦信号

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Ke^{-\sigma t} \sin(\omega t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (2-3)$$

正弦信号和余弦信号常借助复指数信号来表示。由欧拉公式可知

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$$

则有

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad (2-4)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (2-5)$$

这是以后经常要用到的两对关系式。

与指数信号的性质类似,正弦信号对时间的微分与积分仍为同频率的正弦信号。

### 3. 复指数信号

如果指数信号的指数因子为一复数,则称之为复指数信号,其表达式为

$$f(t) = Ke^{st} \quad (2-6)$$

其中

$$s = \sigma + j\omega$$

式中, $\sigma$  为复数  $s$  的实部, $\omega$  为其虚部。借助欧拉公式将式(2-6)展开,可得

$$Ke^{st} = Ke^{(\sigma + j\omega)t} = Ke^{\sigma t} \cos(\omega t) + jKe^{\sigma t} \sin(\omega t) \quad (2-7)$$

此结果表明,一个复指数信号可分解为实部、虚部两部分。其中,实部包含余弦信号,虚部则包含正弦信号。指数因子实部  $\sigma$  表征了正弦与余弦函数振幅随时间变化的情况。若  $\sigma > 0$ , 实部、虚部信号是增幅振荡;若  $\sigma < 0$ , 实部及虚部信号是衰减振荡。指数因子的虚部  $\omega$  则表示正弦与余弦信号的角频率。3 种特殊情况是:当  $\sigma = 0$ , 即  $s$  为虚数时,实部、虚部信号是等幅振荡;而当  $\omega = 0$ , 即  $s$  为实数时,复指数信号成为一般的指数信号;若  $\sigma = 0$  且  $\omega = 0$ , 即  $s = 0$ , 则复指数信号的实部和虚部都与时间无关,成为直流信号。

尽管实际上不能产生复指数信号,但是它概括了多种情况,可以利用复指数信号来描述各种基本信号,如直流信号、指数信号、正弦或余弦信号,以及增长或衰减的正弦与余弦信号。利用复指数信号可使许多运算和分析得以简化。在信号分析理论中,复指数信号是一种非常重要的基本信号。

### 4. Sa(t) 信号(抽样信号)

Sa(t) 函数即 Sa(t) 信号,是指由  $\sin t$  与  $t$  之比构成的函数,即

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (2-8)$$

$\text{Sa}(t)$  函数的波形如图 2-4 所示。我们注意到,它是一个偶函数,在  $t$  的正、负两个方向上振幅都逐渐衰减;当  $t = \pm \pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$  时,函数值等于零。

$\text{Sa}(t)$  函数还具有以下性质:

$$\int_0^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (2-9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi \quad (2-10)$$

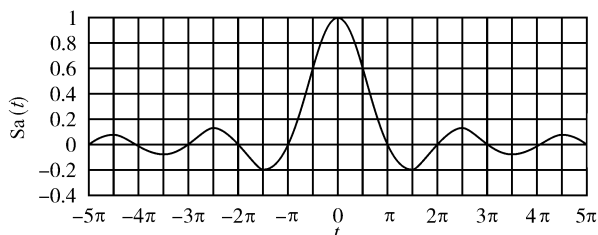


图 2-4  $\text{Sa}(t)$  函数

## 2.1.2 信号的基本运算

### 1. 相加和相乘

信号相加是指若干信号之和,表示为

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \quad (2-11)$$

其相加规则是:同一瞬时各信号的函数值相加构成和信号在这一时刻的瞬时值。

信号相乘是指若干信号之积,表示为

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \dots \cdot f_n(t) \quad (2-12)$$

其相乘规则是:同一瞬时各信号的函数值相乘构成积信号在这一时刻的瞬时值。

【例 2-1】 已知两个信号为

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin t, & t \geq 0 \end{cases}; \quad f_2(t) = -\sin t$$

求  $f_1(t) + f_2(t)$  和  $f_1(t) \cdot f_2(t)$  的表达式。

解:

$$f_1(t) + f_2(t) = \begin{cases} -\sin t, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}; \quad f_1(t) \cdot f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -\sin^2 t, & t \geq 0 \end{cases}$$

当然,也可以通过波形来进行信号的相加和相乘。

### 2. 微分和积分

信号  $f(t)$  的微分是指信号对时间的导数,表示为

$$y(t) = \frac{df(t)}{dt} = f'(t) \quad (2-13)$$

信号  $f(t)$  的积分是指信号在区间  $(-\infty, t)$  上的积分,表示为

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (2-14)$$

### 3. 平移

信号的平移是指信号  $f(t)$  变化为信号  $f(t \pm t_0)$  ( $t_0 > 0$ ) 的运算。若为  $f(t + t_0)$ , 表示信号  $f(t)$  沿  $t$  轴负方向平移  $t_0$  时间; 若为  $f(t - t_0)$ , 表示信号  $f(t)$  沿  $t$  轴正方向平移  $t_0$  时间。

【例 2-2】 已知  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+2), & -2 < t < 0 \\ -(t-1), & 0 < t < 1 \end{cases}$ , 波形如图 2-5(a) 所示, 求  $f(t+1)$ ,  $f(t-1)$ 。

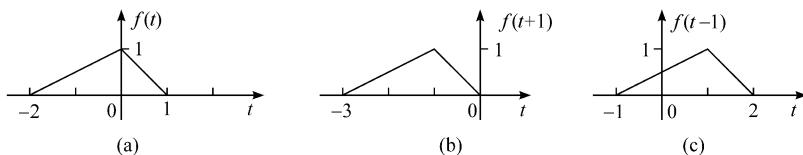


图 2-5 例 2-2 的图

解: 用  $(t+1)$  代替  $t$ , 有

$$f(t+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+1+2), & -2 < t+1 < 0 \\ -(t+1-1), & 0 < t+1 < 1 \end{cases}$$

得 
$$f(t+1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t+3), & -3 < t < -1 \\ -t, & -1 < t < 0 \end{cases}$$

相应的波形如图 2-5(b) 所示(超前)。

同理,  $f(t-1)$  的波形如图 2-5(c) 所示(滞后)。

## 2. 反折

信号的反折是指信号  $f(t)$  变化为  $f(-t)$  的运算。从几何意义上看, 即是将  $f(t)$  以纵轴为中心做  $180^\circ$  翻转。

【例 2-3】 已知  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}(t+2), & -2 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 相应的波形如图 2-6(a) 所示, 求  $f(-t)$ 。

解: 
$$f(-t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}(t-2), & -1 < t < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

相应的波形如图 2-6(b) 所示。

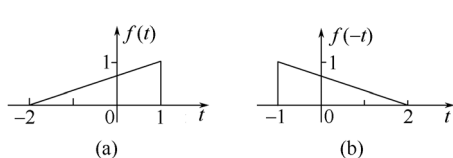


图 2-6 例 2-3 的图

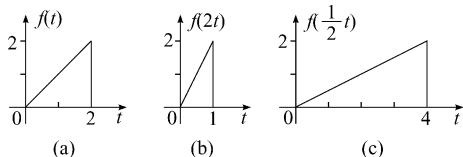


图 2-7 例 2-4 的图

## 5. 尺度变换

信号的尺度变换是指将信号  $f(t)$  变化为  $f(at)$  ( $a > 0$ ) 的运算。若  $0 < a < 1$ , 则将  $f(t)$  以原点为基准, 沿横坐标轴展宽至  $1/a$  倍; 若  $a > 1$ , 则将  $f(t)$  沿横坐标轴压缩至  $1/a$ 。

【例 2-4】 已知  $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 相应的波形如图 2-7(a) 所示, 求  $f(2t)$  和  $f(\frac{1}{2}t)$ 。

解: 
$$f(2t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}; \quad f\left(\frac{1}{2}t\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 < t < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

可见,时移、反折、展缩都是用一个新的时间变量去代换原来的时间变量。相应的波形分别如图 2-7(b) 和(c) 所示。

【例 2-5】 已知  $f(t) = \begin{cases} t+2, & -2 < t < 0 \\ -2t+2, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 相应的波形如图 2-8(a) 所示, 求  $f(2t-1)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}t-1\right)$ 。

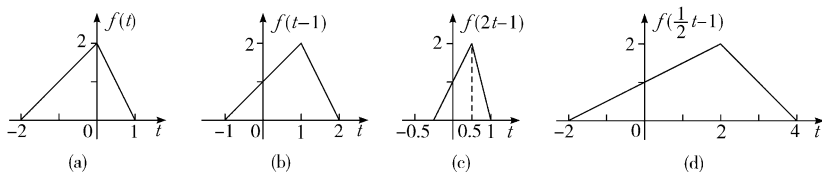


图 2-8 例 2-5 的图

解: 
$$f(t-1) = \begin{cases} t+1, & -1 < t < 1 \\ -2(t-2), & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

相应的波形如图 2-8(b) 所示。

将  $f(t-1)$  压缩, 用  $2t$  代替  $t$ , 有

$$f(2t-1) = \begin{cases} 2t+1, & -1/2 < t < 1/2 \\ -4(t-1), & 1/2 < t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

相应的波形如图 2-8(c) 所示。

将  $f(t-1)$  扩展, 用  $\frac{1}{2}t$  代替  $t$ , 有

$$f\left(\frac{1}{2}t-1\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}t+1, & -2 < t < 2 \\ -t+4, & 2 < t < 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

相应的波形如图 2-8(d) 所示。

【例 2-6】 已知信号  $f(2-2t)$  的波形如图 2-9 所示, 求  $f(t)$ 。

解:  $f(2-2t)$  是信号  $f(t)$  经时移、反折和展缩后所得的信号, 可以用六种方法获得  $f(t)$ , 其过程和波形如图 2-9 所示。

我们知道, 信号有数学表达式和波形两种描述形式。上面所介绍的平移、反折、尺度变换三种运算, 既可以用新时间变量替换原变量  $t$ , 直接写出数学表达式, 又可以利用波形进行变换。从上面例题可以看出, 利用信号的波形进行运算, 更加直观一些。

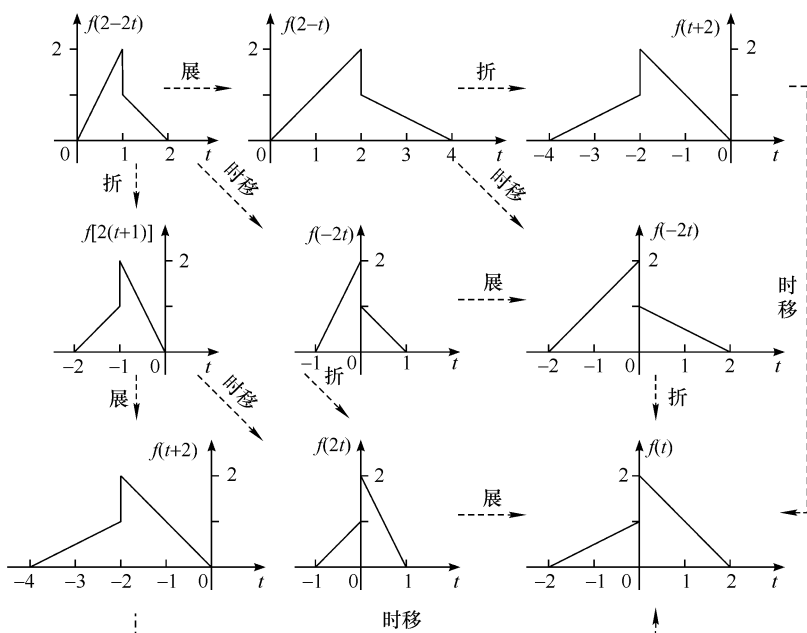


图 2-9 例 2-6 的图

## 2.2 单位阶跃信号和单位冲激信号

单位阶跃信号和单位冲激信号是信号与系统理论中两个重要的基本信号。由于二者的特性与前面介绍的普通信号不同,所以称为奇异信号。研究奇异信号要用广义函数理论,这里将直观地引出单位阶跃信号和单位冲激信号,不去研究广义函数的内容。

### 2.2.1 单位阶跃信号

单位阶跃信号(简称阶跃信号)用符号  $U(t)$  表示。其定义为

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2-15)$$

其波形如图 2-10 所示。

在分析电路时,单位阶跃信号实际上就表示从  $t=0^+$  开始作用的大小为一个单位的电压或电流。

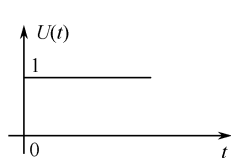


图 2-10 阶跃信号

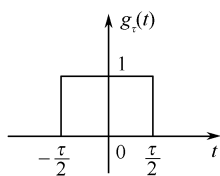


图 2-11 矩形脉冲信号

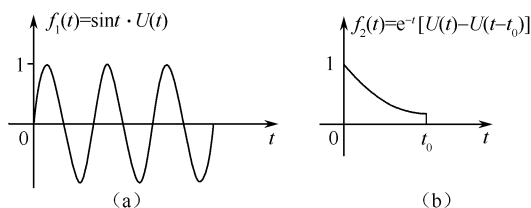


图 2-12 因果信号



利用阶跃信号  $U(t)$ , 可以很容易地表示脉冲信号的存在时间, 如图 2-11 中所示的矩形脉冲信号  $g_\tau(t)$ , 可以用阶跃信号表示为

$$g_\tau(t) = U\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - U\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (2-16)$$

由于阶跃信号鲜明地表现出信号的“单边”特性, 通常将  $t > 0$  之后才有非零函数值的信号称为因果信号。例如

$$f_1(t) = \sin t \cdot U(t), \quad f_2(t) = e^{-t} [U(t) - U(t - t_0)]$$

其波形如图 2-12 所示。可见, 阶跃信号也经常用来表示信号的时间取值范围。

【例 2-7】 已知  $f(t) = \begin{cases} -0.5t, & t < -2 \\ 2, & -2 < t < 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \\ 3-t, & 2 < t < 3 \\ 0, & t > 3 \end{cases}$ , 利用

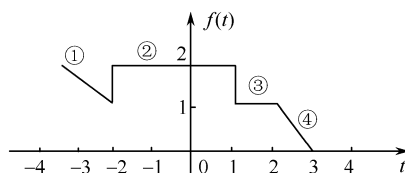


图 2-13 例 2-7 中  $f(t)$  的波形

阶跃信号表示信号  $f(t)$ 。

**解:** 为直观起见, 画出  $f(t)$  的波形如图 2-13 所示。

为了利用阶跃信号表示信号  $f(t)$ , 将每一段波形的范围通过阶跃信号表示出来之后, 再将各段相加就得到信号  $f(t)$ 。

第①段为  $-0.5tU(-t-2)$

第②段为  $2[U(t+2) - U(t-1)]$

第③段为  $U(t-1) - U(t-2)$

第④段为  $(3-t)[U(t-2) - U(t-3)]$

所以  $f(t) = -0.5tU(-t-2) + 2[U(t+2) - U(t-1)] +$   
 $U(t-1) - U(t-2) + (3-t)[U(t-2) - U(t-3)]$

整理得  $f(t) = -0.5tU(-t-2) + 2U(t+2) - U(t-1) +$   
 $(2-t)U(t-2) - (3-t)U(t-3)$

读者不妨用信号的加法和乘法运算检验上式信号  $f(t)$  的阶跃信号表达式是否与其波形一致。

## 2.2.2 单位冲激信号

单位冲激信号(简称冲激信号) $\delta(t)$  定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2-17)$$

如图 2-14(a) 所示, 它是狄拉克(Dirac)最初提出并定义的, 所以又称狄拉克  $\delta$  函数(Dirac Delta Function)。式(2-17)表示集中在  $t=0$ 、面积为 1 的冲激, 这是工程上的定义, 由于它不是普通函数, 因此从严格的数学意义来说, 它是一个颇为复杂的概念。然而为了应用, 并不强调其数学上的严谨性, 而只强调运算方便。

为了对  $\delta(t)$  有一个直观的认识, 可将  $\delta(t)$  看成某些普通函数的极限来定义。

观察图 2-14(b), 它是面积为 1, 脉宽为  $\tau$ , 幅值为  $1/\tau$  的矩形脉冲。当  $\tau \rightarrow 0$  时, 其脉冲的幅值  $1/\tau \rightarrow \infty$ 。这种极限状态下的函数即为冲激信号  $\delta(t)$ 。也就是

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[ U\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - U\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (2-18)$$

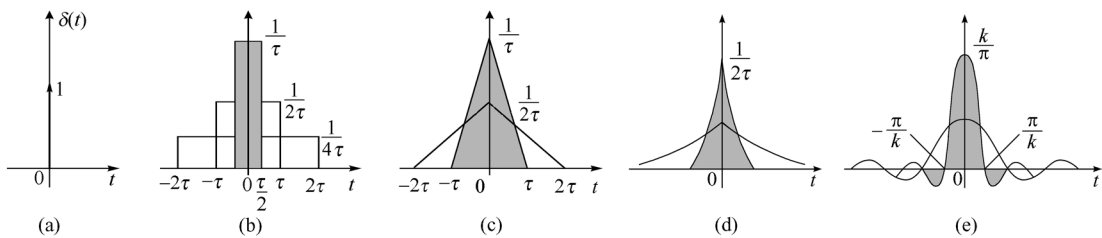


图 2-14 用矩形脉冲、三角脉冲、双边指数脉冲和抽样信号取极限定义冲激信号

除了采用矩形脉冲取极限定义冲激信号外,也可以用三角形脉冲、双边指数脉冲或抽样函数取极限定义冲激信号,如图 2-14(c) ~ (e) 所示。

对于三角脉冲,有

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{|t|}{\tau} \right) [U(t + \tau) - U(t - \tau)] \right\} \quad (2-19)$$

对于双边指数脉冲,有

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|t|}{\tau}} \right) \quad (2-20)$$

对于抽样信号,有

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt) \right] \quad (2-21)$$

总之,在取极限时,在整个横坐标轴上曲线面积恒为定值的函数,都可用做冲激信号的定义,如

$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-kt^2} \quad (2-22)$$

### 2.2.3 冲激信号与阶跃信号的关系

由于  $\delta(t) = 0, t \neq 0$ , 且  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ , 故

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (2-23)$$

即

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = U(t) \quad (2-24)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = \delta(t) \quad (2-25)$$

式(2-24)和式(2-25)表明,单位阶跃信号是单位冲激信号的积分,而单位冲激信号是单位阶跃信号的导数。很明显, $\delta(t)$ 和 $U(t)$ 均不是普通函数,因为一个普通函数从 $-\infty$ 到 $t$ 的积分,应该是积分上限 $t$ 的连续函数,而 $U(t)$ 在 $t=0$ 这一点明显地不连续。同样,一个普通函数在间断点上不存在导数。但在以后的分析中,从物理或工程的角度来看,为了便于描述某些物理量及简化计算,引入 $\delta(t)$ 这个独特的信号后,就能够表达具有间断点的连续信号的导数了。

同样,由于

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

所以

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau = U(t - t_0) \quad (2-26)$$

$$\frac{dU(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0) \quad (2-27)$$

式中,  $\delta(t-t_0)$  是集中在  $t_0$  的面积为 1 的冲激。

## 2.2.4 冲激信号的性质

### 1. 与普通信号相乘

如果信号  $f(t)$  是一个连续的普通函数, 则有

$$f(t) \cdot \delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \quad (2-28)$$

上式表明, 连续信号  $f(t)$  与冲激信号相乘, 只有  $t=t_0$  时的样本值  $f(t_0)$  才对冲激信号有影响, 也即筛选出信号在  $t=t_0$  处的函数值。所以, 这个性质也叫筛选特性, 如图 2-15 所示。

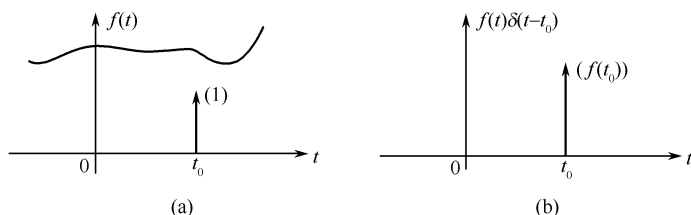


图 2-15 冲激信号的筛选特性

同样条件下, 还有取样特性, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \quad (2-29)$$

上式利用筛选特性很容易证明, 这里从略。

**【例 2-8】** 利用冲激信号的性质计算:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{1}{4}\right) \cdot \sin(\pi t) dt \quad (2) \int_{0^-}^{3^+} e^{-2t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) dt \quad (3) \int_{0^+}^{3^+} e^{-2t} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) dt$$

**解:** 根据取样特性, 有

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{1}{4}\right) \cdot \sin(\pi t) dt = \sin\left(\pi \times \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(2) \int_{0^-}^{3^+} e^{-2t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) dt = \int_{0^-}^{3^+} [e^{-2t} \delta(t) + e^{-2t} \delta(t-2)] dt = 1 + e^{-4}$$

$$(3) \int_{0^+}^{3^+} e^{-2t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) dt = \int_{0^+}^{3^+} e^{-2t} \delta(t-2) dt = e^{-4}$$

### 4. 尺度变换特性

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad a \neq 0 \quad (2-30)$$

由尺度变换特性可得出以下推论:

$$\delta(-t) = \delta(t), \quad a = -1 \quad (2-31)$$

上式说明,  $\delta(t)$  是一个偶函数。

$$\delta(at+b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right) \quad (2-32)$$

【例 2-9】 求下列积分。

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(t) \frac{\sin(2t)}{t} dt \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 + 2t + 3)\delta(1-2t) dt$$

解: (1) 原式 =  $\int_{-\infty}^{+\infty} 4\delta(t) \frac{\sin(2t)}{2t} dt = 4 \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \delta(t) dt = 4$

(2) 由于  $\delta(1-2t) = \delta\left[-2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right] = \delta\left[2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$

所以 原式 =  $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 + 2t + 3)\delta\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} (t^2 + 2t + 3) \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{17}{8}$

### 3. $\delta(t)$ 信号的各阶导数及其性质

$\delta(t)$  信号的各阶导数是不能用常规方法来求的, 在此不进行深入讨论, 只用近似波形来说明  $\delta(t)$  的一阶导数  $\delta'(t)$  的形成, 如图 2-16 所示。 $\delta'(t)$  也叫冲激偶。

下面利用式 (2-29) 研究  $\delta(t)$  信号导数的取样性。

因为  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau)$

两边对  $\tau$  微分  $n$  次, 得

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t-\tau)dt = f^{(n)}(\tau)$$

两边乘以  $(-1)^n$ , 则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t-\tau)dt = (-1)^n f^{(n)}(\tau)$$

令  $\tau=0$ , 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n f^{(n)}(0) \quad (2-33)$$

令  $n=1$ , 则  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0) \quad (2-34)$

通常称  $\delta(t)$  的一阶导数  $\delta'(t)$  为二次冲激 (或叫冲激偶), 则其二阶导数  $\delta''(t)$  称为三次冲

激。对于冲激偶, 除了式 (2-34) 表示的取样性之外, 还有以下特性:

(1) 奇函数性: 由图 2-16 可以看出,  $\delta'(t)$  是奇函数, 所以有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0 \quad (2-35)$$

(2) 与普通信号相乘:

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t) \quad (2-36)$$

【例 2-10】 求以下两个信号的一阶导数。

$$f_1(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\delta(t), \quad f_2(t) = (-3t+3)[U(t) - U(t-1)]$$

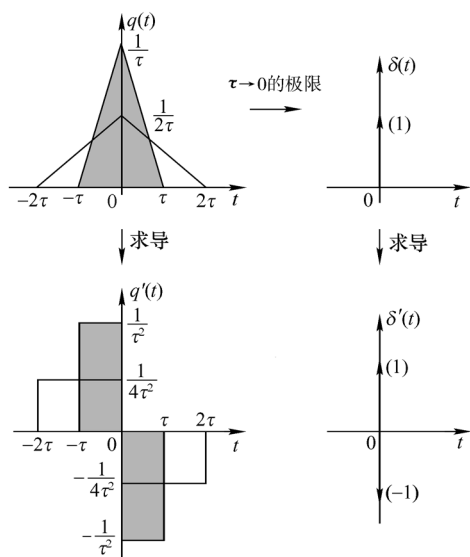


图 2-16 冲激偶的形成

$$\text{解: } f_1'(t) = \left[ \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \delta(t) \right]' = \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \delta(t) \right]' = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta'(t)$$

$$\begin{aligned} f_2'(t) &= \frac{d}{dt} \{ (-3t+3) [U(t) - U(t-1)] \} \\ &= (-3t+3)' [U(t) - U(t-1)] + (-3t+3) [U(t) - U(t-1)]' \\ &= -3 [U(t) - U(t-1)] + (-3t+3) [\delta(t) - \delta(t-1)] \\ &= -3 [U(t) - U(t-1)] + 3\delta(t) \end{aligned}$$

正如前面所讲的,  $\delta$  函数不是一般函数, 而是广义函数, 因此对  $\delta$  函数进行常规的加减、微分、积分等运算是不合理的。但在 20 世纪 50 年代, 它们严密的数学基础已由 L. Schwartz 所提出的广义函数建立起来。尽管这种理论可以使  $\delta$  函数和各种运算建立在合乎逻辑的基础上, 但从工程观点来看, 直观地理解  $\delta$  函数的意义还是十分重要的。实际上某些理想化的物理量已经隐藏着  $\delta$  函数的概念。例如以电学中经常提到的点电荷而言, 其几何尺寸为零, 那么其电荷密度就是冲激函数; 另外对于作用在一个点的力, 该点的压强也为冲激函数。推广来说, 如果某物理量的分布是离散的, 只存在于各个点上, 那么这些点上的分布密度为无限大, 而其积分为有限值。换句话说, 离散量在各个点的分布密度都是冲激函数。

## 2.3 连续系统的零输入响应

在电路分析理论学习中我们知道, 线性系统的全响应包括两部分, 即零输入响应和零状态响应。当已知一个系统的微分方程、激励和初始状态时, 可以通过解微分方程的方法, 求出全响应, 从而得到零输入响应和零状态响应。这种解微分方程求响应的方法叫经典时域分析法。解微分方程的方法在高等数学和电路分析基础中已经熟悉, 此处不再介绍这种经典法。而零输入响应是由系统的初始状态单独作用系统时所产生的响应, 与激励信号无关。因此系统的响应往往仅指零状态响应。在本章的时域分析方法中, 重点研究零状态响应的求解方法。零输入响应的时域求解方法与微分方程的齐次解非常类似, 比较容易理解和掌握, 所以下面仅以几个例子说明系统的零输入响应的分析方法。

【例 2-11】 已知某系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$$

初始状态  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = 2$ 。求系统的零输入响应  $y_x(t)$ 。

解: 在零输入条件下, 微分方程等号右端为零, 变为齐次方程, 即

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

特征根为  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -3$  (两不等单根), 故系统的零输入响应为

$$y_x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

由于输入为零, 所以初始值为

$$y_x(0^+) = y_x(0^-) = y(0^-) = 1$$

$$y'_x(0^+) = y'_x(0^-) = y'(0^-) = 2$$

将  $y_x(0^+) = 1$ ,  $y'_x(0^+) = 2$  代入  $y_x(t)$  中, 有

$$y_x(0^+) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y'_x(0^+) = -2C_1 - 3C_2 = 2$$

联立上面两式,得  $C_1 = 5, C_2 = -4$ 。因此,该系统的零输入响应为

$$y_x(t) = 5e^{-2t} - 4e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

【例 2-12】 如图 2-17 所示 RLC 电路。已知  $i_L(0^-) = 1\text{A}, u_C(0^-) = 10\text{V}$ , 求电流  $i(t)$  的零输入响应  $i_x(t)$ 。

解:要求系统的响应,先必须建立系统的数学模型,即列写描述输入、输出关系的微分方程。

$$\text{由 KVL 得 } Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = f(t)$$

两边取微分并将  $R, L, C$  的值代入整理得

$$i''(t) + 2i'(t) + i(t) = f'(t)$$

$$\text{系统的特征方程为 } \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

特征根为  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  (两重根), 所以该系统的零输入响应为

$$i_x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t}, \quad t \geq 0$$

要求出系数  $C_1$  和  $C_2$ , 需要两个初始条件  $i_x(0^+)$  和  $i'_x(0^+)$ 。已知  $i_x(0^+) = i_x(0^-) = i_L(0^-) = 1\text{A}$ , 还要求出  $i'_x(0^+)$ 。由  $t=0^+$  时求出电感两端的电压  $u_L(0^+) = -12\text{V}$ , 所以

$$i'_x(0^+) = u_L(0^+)/L = -12\text{A/s}$$

将  $i_x(0^+) = 1\text{A}, i'_x(0^+) = -12\text{A/s}$  代入  $i_x(t)$  中, 得

$$i_x(0^+) = C_1 = 1, \quad i'_x(0^+) = -C_1 + C_2 = -12$$

解得  $C_1 = 1, C_2 = -11$ , 所以, 电流  $i(t)$  的零输入响应为

$$i_x(t) = (1 - 11t) e^{-t}, \quad t \geq 0$$

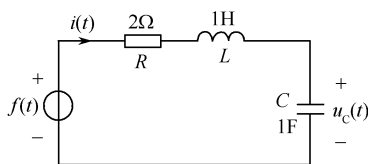


图 2-17 例 2-12 的图

## 2.4 冲激响应和阶跃响应

系统的冲激响应定义为:在冲激信号激励下系统所产生的零状态响应。这个定义说明,冲激响应包含两个含义,一是激励是冲激信号,二是初始状态为零。系统的冲激响应用  $h(t)$  来表示。图 2-18 说明了  $h(t)$  的产生条件。

从冲激响应的定义可知,对于不同的系统,就有不同的冲激响应,可见冲激响应  $h(t)$  也可以表征系统的特性。所以,通常将系统的  $h(t)$  叫做系统的时间特性,即意味着不同的  $h(t)$ , 系统的特征不同,它在系统分析中占有很重要的地位。

与冲激响应  $h(t)$  的定义类似,系统在阶跃信号激励下产生的零状态响应称为阶跃响应,用  $g(t)$  表示,如图 2-18 所示。

考虑到  $\delta(t)$  信号与  $U(t)$  信号之间存在微分与积分关系,因而对 LTI 系统的  $h(t)$  和  $g(t)$  也同样存在微分与积分的关系,即

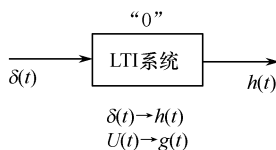


图 2-18 冲激响应和阶跃响应

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad (2-37)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (2-38)$$

下面主要研究如何求得因果系统的冲激响应  $h(t)$ 。

对于用常系数微分方程描述的系统,它的冲激响应  $h(t)$  满足微分方程

$$\begin{aligned} h^{(n)}(t) + a_{n-1}h^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1h'(t) + a_0h(t) \\ = b_m\delta^{(m)}(t) + b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1\delta'(t) + b_0\delta(t) \end{aligned} \quad (2-39)$$

初始状态  $h^{(i)}(0^-) = 0 (i=0, 1, \cdots, n-1)$ 。由于  $\delta(t)$  及其各阶导数在  $t \geq 0^+$  时都等于零,因此式(2-39)右端各项在  $t \geq 0^+$  时恒等于零,这时式(2-39)成为齐次方程,这样冲激响应  $h(t)$  的形式应与齐次解的形式相同。在  $n > m$  时,  $h(t)$  可以表示为

$$h(t) = \left( \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \right) U(t) \quad (2-40)$$

式中,待定系数  $C_i (i=1, 2, \cdots, n)$  可以采用冲激平衡法确定,即将式(2-40)代入式(2-39)中,为保持系统对应的动态方程式恒等,方程式两边所具有的冲激信号及其高阶导数相等。在  $n \leq m$  时,要使方程两边所具有的冲激信号及其高阶导数相等,则  $h(t)$  的表达式中还应含有  $\delta(t)$  及其各阶导数  $\delta^{(m-n)}(t), \delta^{(m-n-1)}(t), \cdots, \delta'(t)$  等项。下面举例说明冲激响应的求解。

**【例 2-13】** 已知某系统的微分方程为

$$y'(t) + 2y(t) = f(t)$$

求该系统的冲激响应  $h(t)$ 。

**解:** 由冲激响应的定义有

$$h'(t) + 2h(t) = \delta(t) \quad \text{和} \quad h(0^-) = 0$$

当  $t \geq 0^+$  时

$$h'(t) + 2h(t) = 0$$

所以

$$h(t) = Ce^{-2t}U(t) \quad (U(t) \text{ 表示取 } t \geq 0^+)$$

①

将式①代入  $h(t)$  的微分方程中有

$$-2Ce^{-2t}U(t) + Ce^{-2t}\delta(t) + 2Ce^{-2t}U(t) = \delta(t)$$

为了保持方程恒等,利用冲激平衡法,则有  $C=1$ 。所以  $h(t) = e^{-2t}U(t)$

**【例 2-14】** 某 LTI 系统如图 2-19 所示,求该系统的冲激响应。

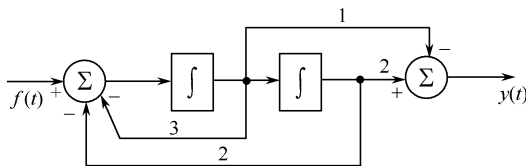


图 2-19 例 2-14 的系统框图

**解:** 我们在第 1 章的例 1-4 中已经求得该系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = -f'(t) + 2f(t)$$

对  $h(t)$ , 微分方程为

$$h''(t) + 3h'(t) + 2h(t) = -\delta'(t) + 2\delta(t)$$

当  $t \geq 0^+$  时有

$$h''(t) + 3h'(t) + 2h(t) = 0$$

所以

$$h(t) = (C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t})U(t)$$

将上式微分得  $h'(t) = (-C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t})U(t) + (C_1 + C_2)\delta(t)$

再微分一次得  $h''(t) = (C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t})U(t) + (-C_1 - 2C_2)\delta(t) + (C_1 + C_2)\delta'(t)$

将  $h''(t)$ ,  $h'(t)$  和  $h(t)$  代入  $h(t)$  的微分方程中得

$$\begin{aligned} & (C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t})U(t) + (-C_1 - 2C_2)\delta(t) + (C_1 + C_2)\delta'(t) + \\ & 3(-C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t})U(t) + 3(C_1 + C_2)\delta(t) + 2(C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t})U(t) \\ & = -\delta'(t) + 2\delta(t) \end{aligned}$$

为了使方程平衡,利用冲激平衡法,则有

$$\begin{cases} -C_1 - 2C_2 + 3(C_1 + C_2) = 2 \\ C_1 + C_2 = -1 \end{cases}$$

解得  $C_1 = 3, C_2 = -4$

所以  $h(t) = (3e^{-t} - 4e^{-2t})U(t)$

**【例 2-15】** 如图 2-20 所示 RC 电路,已知  $u_C(0^-) = 0$ ,以电流  $i(t)$  为响应,求系统的冲激响应。

**解:**由 KVL 写出  $f(t)$  与  $i(t)$  之间关系的方程为

$$\frac{1}{2}i(t) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = f(t)$$

两边微分并整理得  $i'(t) + i(t) = 2f'(t)$

对冲激响应  $h(t)$  有

$$h'(t) + h(t) = 2\delta'(t), \quad h(0^-) = 0 \quad \textcircled{1}$$

从式①可知,要使方程两端恒等, $h(t)$  中必然含有冲激信号  $\delta(t)$  项,即设

$$h(t) = C_1 e^{-t}U(t) + C_2 \delta(t)$$

将其代入  $h(t)$  的方程中有

$$-C_1 e^{-t}U(t) + C_1 \delta(t) + C_2 \delta'(t) + C_1 e^{-t}U(t) + C_2 \delta(t) = 2\delta'(t)$$

根据冲激平衡法有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

解得  $C_1 = -2, C_2 = 2$ ,所以系统的冲激响应为

$$h(t) = -2e^{-t}U(t) + 2\delta(t)$$

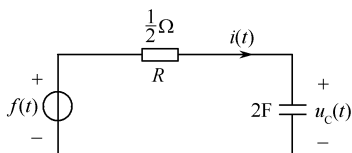


图 2-20 例 2-15 的图

## 2.5 连续系统的零状态响应——卷积积分

卷积积分在信号与系统理论中占有重要地位。本节介绍的卷积积分是连续系统时域分析中求解系统零状态响应的主要方法。

### 2.5.1 卷积积分

任意信号  $f(t)$  都可以根据不同需要进行不同的分解。如信号  $f(t)$  可分解为直流分量和交流分量,也可分解为奇分量和偶分量,或分解为实部分量和虚部分量。我们在此讨论的是将信号  $f(t)$  分解为冲激信号的线性组合。下面以图 2-21 为例说明这种分解方法。

由图 2-21(a)可见,任意信号  $f(t)$  都可分解为矩形窄脉冲信号的叠加,即



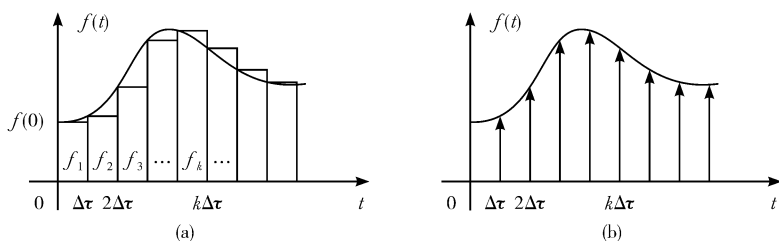


图 2-21 有始信号分解为冲激信号的叠加

$$f(t) \approx f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_k(t) + \cdots \quad (2-41)$$

式中

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f(0) [U(t) - U(t - \Delta\tau)] \\ f_2(t) &= f(\Delta\tau) [U(t - \Delta\tau) - U(t - 2\Delta\tau)] \\ &\vdots \\ f_k(t) &= f(k\Delta\tau) [U(t - k\Delta\tau) - U(t - (k+1)\Delta\tau)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{用求和式表示为} \quad f(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta\tau) [U(t - k\Delta\tau) - U(t - (k+1)\Delta\tau)] \quad (2-42)$$

当  $\Delta\tau \rightarrow 0$  时, 上式就可以完全表示信号  $f(t)$  了。这时  $k\Delta\tau \rightarrow \tau$ ,  $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ , 且有

$$\frac{U(t - k\Delta\tau) - U(t - (k+1)\Delta\tau)}{\Delta\tau} \rightarrow \delta(t - \tau)$$

所以

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta\tau) \delta(t - k\Delta\tau) \Delta\tau \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= f(t) * \delta(t) \end{aligned} \quad (2-43)$$

式(2-43)表明任意信号  $f(t)$  可以分解为一系列具有不同强度、不同时延的冲激信号的叠加, 如图 2-21(b) 所示, 这样的过程称为卷积积分, 用符号“\*”表示。当式(2-43)中  $k$  取  $-\infty \sim \infty$ , 即信号  $f(t)$  是双边信号时,  $f(t)$  可表示为

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t) * \delta(t) \quad (2-44)$$

将信号  $f(t)$  分解为冲激信号的线性组合之后, 我们就可以讨论当信号  $f(t)$  通过一个 LTI 系统时产生的零状态响应了。

设  $\delta(t) \rightarrow h(t)$ , 由式(2-43)及 LTI 系统的特性有

$$f(k\Delta\tau) \delta(t - k\Delta\tau) \Delta\tau \rightarrow f(k\Delta\tau) h(t - k\Delta\tau) \Delta\tau$$

$$\text{当 } \Delta\tau \rightarrow 0 \text{ 时有} \quad f(t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = f(t) * h(t)$$

即  $f(t)$  产生的零状态响应为

$$y_f(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (2-45)$$

上式表明, 一个连续系统的零状态响应是激励信号与系统冲激响应的卷积积分。可见, 有了卷积积分, 就有了求解系统零状态响应的新方法。这种利用卷积积分求零状态响应的方法是系统时域分析中主要使用的方法。

【例 2-16】 已知某 LTI 系统的冲激响应  $h(t) = e^{-t}U(t)$ 。若输入为  $f(t) = U(t)$ , 试求其输出。

解: 这里的输出指零状态响应  $y_f(t)$ 。

$$\begin{aligned} y_f(t) &= f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U(\tau) e^{-(t-\tau)} U(t - \tau) d\tau \\ &\stackrel{t>0}{=} \int_0^t e^{-t} \cdot e^{\tau} d\tau \stackrel{t>0}{=} e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau \stackrel{t>0}{=} e^{-t} \cdot e^{\tau} \Big|_0^t \\ &= (1 - e^{-t}) U(t) \end{aligned}$$

这里计算卷积积分时, 考虑到  $U(t)$  的定义, 所以  $U(\tau)$  中的  $\tau$  必取  $\tau > 0$ ,  $U(t - \tau)$  中的  $\tau$  必取  $\tau < t$ , 这样  $\tau$  的取值范围就是  $0 < \tau < t$ 。最后结果中还要限定  $t$  的取值范围。本题中显然  $t > 0$ , 故加写  $U(t)$ 。

【例 2-17】 已知  $f_1(t) = e^{-3t}U(t)$ ,  $f_2(t) = e^{-5t}U(t)$ , 计算  $f_1(t) * f_2(t)$ 。

解: 根据卷积积分定义, 有

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau} U(\tau) \cdot e^{-5(t-\tau)} U(t - \tau) d\tau \\ &\stackrel{t>0}{=} \int_0^t e^{-3\tau} \cdot e^{-5(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2} (e^{-3t} - e^{-5t}) U(t) \end{aligned}$$

## 2.5.2 卷积积分的图解法

卷积积分除了用定义直接计算之外, 还可以用图解的方法计算, 更能直观地理解卷积积分的计算过程。

由卷积积分的定义知, 要用图解法计算卷积积分  $f(t) * h(t)$ , 一般按照下面的步骤进行:

- (1) 将  $f(t)$  和  $h(\tau)$  的自变量  $t \rightarrow \tau$ 。
- (2) 反折, 将  $h(\tau)$  绕纵坐标反折得  $h(-\tau)$ 。
- (3) 时移, 将  $h(-\tau)$  沿  $\tau$  轴移动某时刻  $t_1$  得  $h(t_1 - \tau)$ 。
- (4) 相乘, 将时移后的  $h(t_1 - \tau)$  乘以  $f(\tau)$  得  $f(\tau)h(t_1 - \tau)$ 。

(5) 积分, 沿  $\tau$  轴对上述乘积信号  $f(\tau)h(t_1 - \tau)$  积分, 即  $y_f(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t_1 - \tau) d\tau$ , 其值  $y_f(t_1)$  正是  $t_1$  时刻  $f(\tau)h(t_1 - \tau)$  曲线下的面积。

(6) 以  $t$  为变量, 将波形  $h(t - \tau)$  连续地沿  $\tau$  轴平移, 从而得到在任意时刻  $t$  的卷积积分, 即  $f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau) d\tau$ , 它是时间  $t$  的函数。

【例 2-18】 已知  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  如图 2-22 所示, 用图解法求  $f_1(t) * f_2(t)$ 。

解: 当  $t$  从  $-\infty$  向  $+\infty$  改变时,  $f_2(t - \tau)$  自左向右平移, 对应不同的  $t$  值范围,  $f_2(t - \tau)$  与  $f_1(\tau)$  相乘、积分的结果如下, 相应的波形如图 2-23 所示。

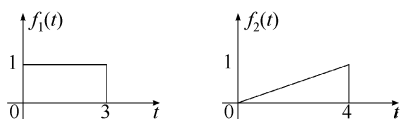


图 2-22 例 2-18 中  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  的波形

(1)  $t < 0$ ,  $f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) = 0$ ,  $f_1(t) * f_2(t) = 0$ 。

(2)  $0 < t < 3$ , 积分区间为公共非零区间。

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t 1 \times \frac{1}{4}(t - \tau) d\tau = \frac{t}{4} \cdot \tau \Big|_0^t - \frac{1}{8}\tau^2 \Big|_0^t = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t^2 = \frac{1}{8}t^2$$

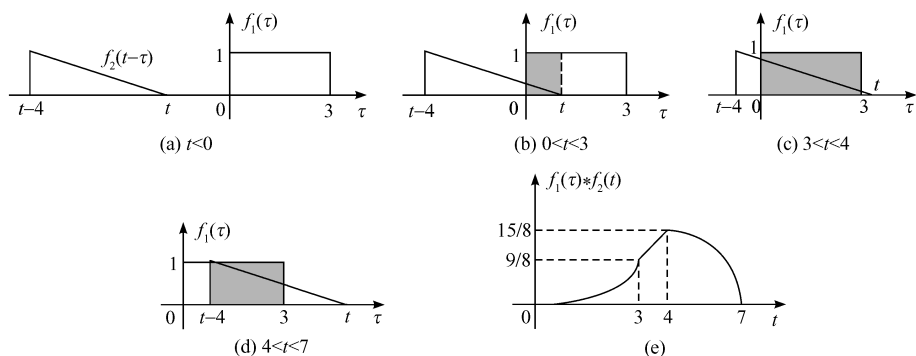


图 2-23 例 2-18 的波形

$$(3) \quad 3 < t < 4, f_1(t) * f_2(t) = \int_0^3 \frac{1}{4}(t - \tau) d\tau = \frac{3}{4}t - \frac{9}{8}$$

$$(4) \quad 4 < t < 7, f_1(t) * f_2(t) = \int_{t-4}^3 \frac{1}{4}(t - \tau) d\tau = \frac{1}{4}t \cdot \tau \Big|_{t-4}^3 - \frac{1}{8}\tau^2 \Big|_{t-4}^3 = \frac{1}{8}(-t^2 + 6t + 7)$$

$$(5) \quad t > 7, f_1(t) * f_2(t) = 0。$$

所以

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{8}t^2, & 0 < t < 3 \\ \frac{3}{4}t - \frac{9}{8}, & 3 < t < 4 \\ \frac{1}{8}(-t^2 + 6t + 7), & 4 < t < 7 \\ 0, & t > 7 \end{cases}$$

通过上例分析,可以得到如下结论:

(1) 积分上下限是两信号重叠部分的边界,下限为两信号左边界的最大者,上限为两信号右边界的最小者。

(2) 卷积后信号的时限等于两信号时限之和。

**【例 2-19】** 求  $y(t) = g_{\tau_1}(t) * g_{\tau_1}(t)$ 。

**解:** 分别画出不同时刻  $t$  两个时间信号相重叠的波形如图 2-24 所示,分别对不同的时刻  $t$  的区间做卷积运算,可最终求得  $y(t)$ 。

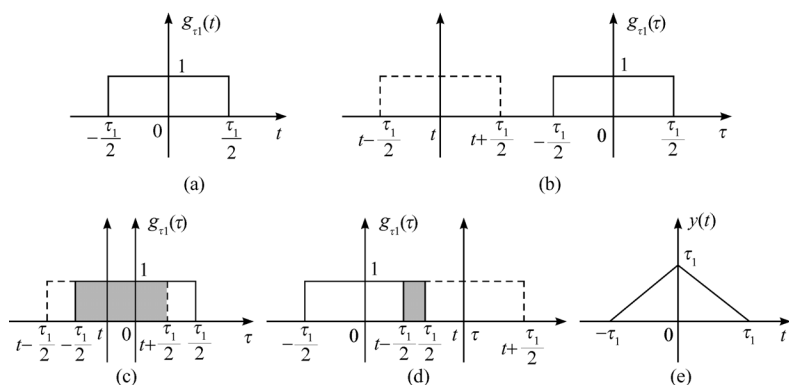


图 2-24 例 2-19 的波形

(1)  $-\infty < t < -\tau_1$ ,  $y(t) = 0$ , 如图 2-24(b) 所示。

(2)  $-\tau_1 < t < 0$ ,  $y(t) = \int_{-\tau_1}^{t+\frac{\tau_1}{2}} 1 d\tau = \tau \Big|_{-\tau_1}^{t+\frac{\tau_1}{2}} = t + \tau_1$ , 如图 2-24(c) 所示。

(3)  $0 < t < \tau_1$ ,  $y(t) = \int_{t-\frac{\tau_1}{2}}^{\frac{\tau_1}{2}} 1 d\tau = \tau_1 - t$ , 如图 2-24(d) 所示。

(4)  $t > \tau_1$ ,  $y(t) = 0$ 。

所以

$$y(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < -\tau_1 \\ t + \tau_1, & -\tau_1 < t < 0 \\ \tau_1 - t, & 0 < t < \tau_1 \\ 0, & t > \tau_1 \end{cases}$$

$y(t)$  的波形如图 2-24(e) 所示。可见, 两个门宽相等的门信号卷积, 得到一个三角脉冲信号。

### 2.5.3 卷积积分的性质

卷积积分是一种数学运算, 它有一些重要的运算规则。灵活运用这些规则可以简化计算过程。

#### 1. 卷积积分的代数律

(1) 交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (2-46)$$

证明: 因为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

令  $\lambda = t - \tau$ , 则有

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \lambda) f_2(\lambda) d\lambda = f_2(t) * f_1(t)$$

若将  $f_1(t)$  看成系统的激励, 而将  $f_2(t)$  看成一个系统的单位冲激响应, 则卷积的结果就是该系统对  $f_1(t)$  的零状态响应。卷积的交换律说明, 也可将  $f_2(t)$  看成系统的激励, 而将  $f_1(t)$  看成系统的单位冲激响应, 即图 2-25(a) 和(b) 两个系统的零状态响应是一样的。

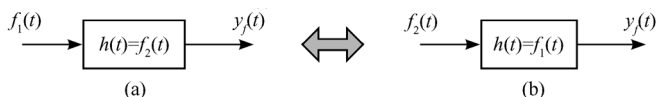


图 2-25 卷积交换律的图示

从图 2-25 可见, 信号可由系统来实现, 系统也可用信号来模拟。

(2) 结合律

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \quad (2-47)$$

这里包含两次卷积运算, 是一个二重积分, 只要改换积分次序即可证明此定律。

$$\begin{aligned} \text{证明: } [f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(\tau - \lambda) d\lambda \right] f_3(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau - \lambda) f_3(t - \tau) d\tau \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_3(t - \tau - \lambda) d\tau \right] d\lambda \\ &= f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \\ &= f_1(t) * [f_3(t) * f_2(t)] \end{aligned}$$

卷积结合律的图示见图 2-26。

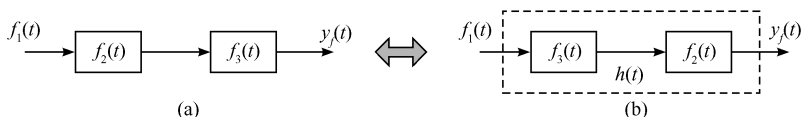


图 2-26 卷积结合律的图示

从系统的观点看,两个系统级联时,总系统的冲激响应等于子系统冲激响应的卷积积分,即  $h(t) = f_2(t) * f_3(t)$ , 且和级联次序无关。

### (3) 分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (2-48)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) [f_2(t - \tau) + f_3(t - \tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_3(t - \tau) d\tau \\ &= f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \end{aligned}$$

若将  $f_1(t)$  看做某系统的单位冲激响应  $h(t)$ , 而将  $f_2(t) + f_3(t)$  看成该系统的激励, 则分配律是用数学方法表达线性系统的叠加特性, 即系统的零状态响应  $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)]$  是系统对  $f_2(t)$  的零状态响应  $f_1(t) * f_2(t)$  与系统对  $f_3(t)$  的零状态响应  $f_1(t) * f_3(t)$  的叠加, 如图 2-27 所示。

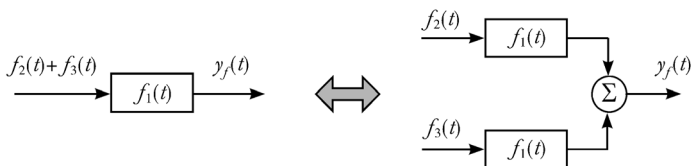


图 2-27 卷积分配律的图示

另外,若将  $f_2(t)$  和  $f_3(t)$  看做两个系统的单位冲激响应,  $f_1(t)$  看做同时作用于它们的激励, 则分配律表明, 并联 LTI 系统对输入  $f(t)$  的响应等于各子系统对  $f(t)$  的响应之和, 如图 2-28 所示。

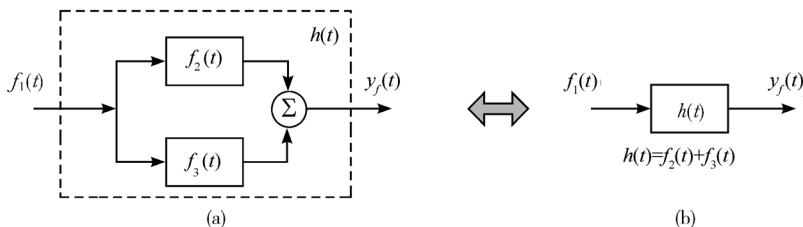


图 2-28 卷积分配律的另一种图示

## 2. 卷积的微分与积分

两个信号卷积后的导数等于其中一个信号之导数与另一个信号的卷积, 其表达式为

$$\frac{d}{dt} [f_1(t) * f_2(t)] = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t) \quad (2-49)$$

由卷积定义可证明此关系式。

$$\begin{aligned}\text{证明: } \frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \frac{df_2(t - \tau)}{dt} d\tau \\ &= f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt}\end{aligned}\quad (2-50)$$

$$\text{同样可以证得} \quad \frac{d}{dt}[f_2(t) * f_1(t)] = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t) \quad (2-51)$$

显然,  $f_2(t) * f_1(t)$  也即  $f_1(t) * f_2(t)$ , 故式(2-49)成立。

两信号卷积后的积分等于其中一个信号之积分与另一个信号的卷积。其表达式为

$$\int_{-\infty}^t [f_1(\tau) * f_2(\tau)] d\tau = f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau = f_2(t) * \int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau \quad (2-52)$$

$$\begin{aligned}\text{证明: } \int_{-\infty}^t [f_1(\tau) * f_2(\tau)] d\tau &= \int_{-\infty}^t \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\lambda - \tau) d\lambda \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^t f_2(\lambda - \tau) d\lambda \right] d\tau \\ &= f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (2-53)$$

借助卷积交换律同样可求得  $f_2(t)$  与  $f_1(t)$  之积分相卷积的形式, 于是式(2-52)全部得到证明。

应用类似的推演可以导出卷积的高阶导数或多重积分之运算规律。

设  $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 则有

$$f^{(i)}(t) = f_1^{(i)}(t) * f_2^{(i-j)}(t) \quad (2-54)$$

此处, 当  $i, j$  取正整数时为导数的阶次, 取负整数时为重积分的次数。读者可自行证明。

$$\text{特别有} \quad f(t) = f(t) * h(t) = f'(t) * h^{(-1)}(t) \quad (2-55)$$

式(2-55)表明, 通过对激励信号和冲激响应分别积分和求导, 再求卷积, 同样可以求得零状态响应, 这为求零状态响应提供了一条新途径, 当其中一个时间信号为时限信号时, 用上述公式会很方便。

### 3. 含有奇异信号的卷积

两个时间信号做卷积运算时, 若其中一个时间信号为奇异信号, 它们在信号与系统分析中, 有一定的物理含义, 讨论如下。

(1) 信号  $f(t)$  与单位冲激信号的卷积

在信号的分解中, 我们已经得到式(2-44), 即

$$f(t) = f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t)$$

这表明系统的冲激响应  $h(t) = \delta(t)$ , 如图 2-29 所示。冲激响应为  $\delta(t)$  的系统等效为短路线。

(2) 信号  $f(t)$  与  $\delta(t - t_0)$  的卷积

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = f(t - t_0) \quad (2-56)$$

这表明, 信号  $f(t)$  与  $\delta(t - t_0)$  相卷积的结果, 相当于把信号本身延时  $t_0$ 。若系统的冲激响应  $h(t) = \delta(t - t_0)$ , 如图 2-30 所示, 则冲激响应为  $\delta(t - t_0)$  的系统是延时为  $t_0$  的延时器。

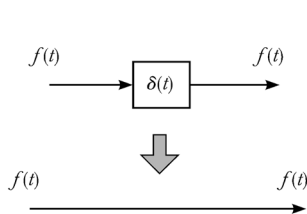


图 2-29  $\delta(t)$  所描述的系统

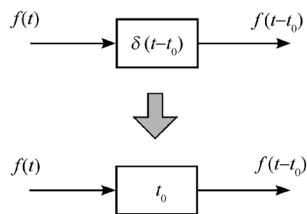


图 2-30  $\delta(t-t_0)$  所描述的系统

利用式(2-56)及卷积的交换律、结合律可以得到一般的两个信号卷积的时移特性。

设  $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 则有

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f_1(t-t_2) * f_2(t-t_1) = f(t-t_1-t_2) \quad (2-57)$$

证明:

$$\begin{aligned} f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) &= [f_1(t) * \delta(t-t_1)] * f_2(t-t_2) \\ &= f_1(t) * [\delta(t-t_1) * f_2(t-t_2)] \\ &= [f_1(t) * \delta(t-t_2)] * f_2(t-t_1) \\ &= f_1(t-t_2) * f_2(t-t_1) \\ f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) &= [f_1(t) * \delta(t-t_1)] * f_2(t-t_2) \\ &= f_1(t) * [f_2(t) * \delta(t-t_1-t_2)] \\ &= [f_1(t) * f_2(t)] * \delta(t-t_1-t_2) \\ &= f(t) * \delta(t-t_1-t_2) \\ &= f(t-t_1-t_2) \end{aligned}$$

式(2-57)的图解表示如图 2-31 所示。

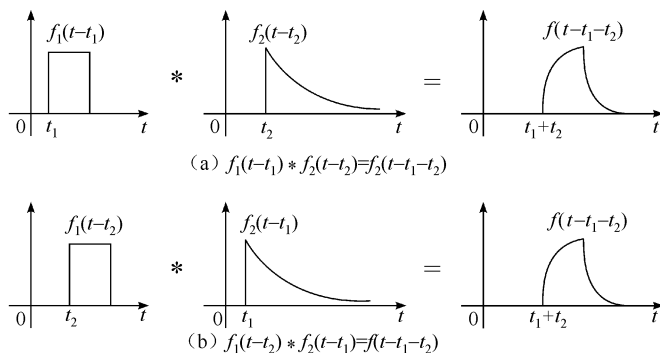


图 2-31 式(2-57)的图解

(3) 信号  $f(t)$  与冲激偶  $\delta'(t)$  的卷积

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t) \quad (2-58)$$

证明:由式(2-50)有

$$f(t) * \delta'(t) = f'(t) * \delta(t) = f'(t)$$

若系统的冲激响应为  $\delta'(t)$ , 如图 2-32 所示, 则该系统是一个微分器。推广到  $n$  阶微分系统有

$$f(t) * \delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) \quad (2-59)$$

(4) 信号  $f(t)$  与单位阶跃信号的卷积

$$f(t) * U(t) = f(t) * \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau * \delta(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (2-60)$$

同理, 若系统的冲激响应为  $U(t)$ , 如图 2-33 所示, 则该系统是一个积分器。

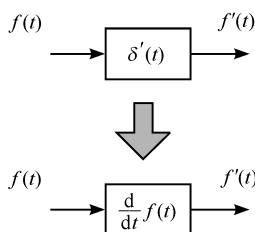


图 2-32  $\delta'(t)$  所描述的系统

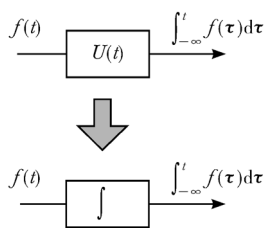


图 2-33  $U(t)$  所描述的系统

【例 2-20】 已知系统的单位冲激响应  $h(t) = \sin t \cdot U(t)$ , 若激励如图 2-34(a) 所示, 求系统的零状态响应  $y_f(t)$ 。

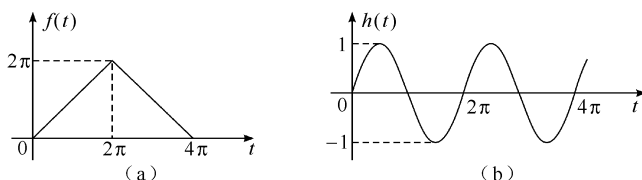


图 2-34 例 2-20 的激励和  $h(t)$

解:

$$y_f(t) = f(t) * h(t) = f''(t) * h^{(-2)}(t)$$

对  $f(t)$  做二阶求导, 相应的波形如图 2-35 所示。有

$$f''(t) = \delta(t) - 2\delta(t - 2\pi) + \delta(t - 4\pi)$$

又因为

$$h^{(-1)}(t) = \int_0^t \sin \tau U(\tau) d\tau = (1 - \cos t) U(t)$$

$$h^{(-2)}(t) = \int_0^t (1 - \cos \tau) d\tau = (t - \sin t) U(t)$$

则

$$\begin{aligned} y_f(t) &= [(t - \sin t) U(t)] * [\delta(t) - 2\delta(t - 2\pi) + \delta(t - 4\pi)] \\ &= (t - \sin t) U(t) - 2[(t - 2\pi) - \sin(t - 2\pi)] U(t - 2\pi) + \\ &\quad [(t - 4\pi) - \sin(t - 4\pi)] U(t - 4\pi) \end{aligned}$$

相应的波形如图 2-36 所示。

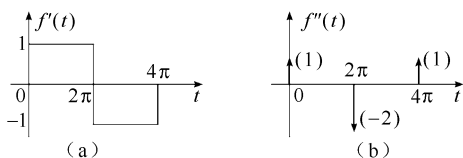


图 2-35  $f'(t)$  和  $f''(t)$  的波形

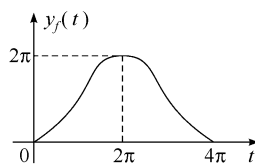


图 2-36  $y_f(t)$  的波形

【例 2-21】 已知  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  如图 2-37 所示, 求  $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

解: 根据  $f(t)$  与  $\delta(t)$  和  $\delta(t - t_0)$  相卷积的性质

可得

$$\begin{aligned} y(t) &= 2f_2(t) - 2f_2(t - 1) + 2f_2(t - 2) \\ &= 4[U(t) - U(t - 1) + U(t - 2) - \\ &\quad U(t - 3) + U(t - 4) - U(t - 5)] \end{aligned}$$

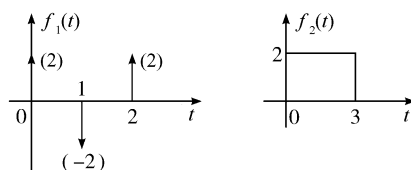


图 2-37  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  的波形



可画出  $y(t)$  的波形如图 2-38(b) 所示。

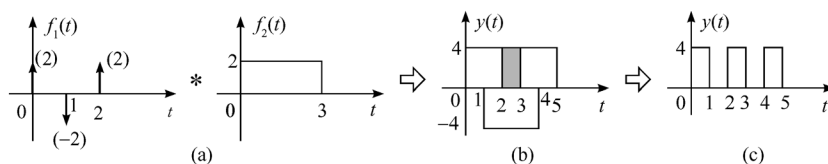


图 2-38 例 2-21 中  $y(t)$  的波形

【例 2-22】 已知  $\delta_T(t) = \cdots + \delta(t + kT) + \cdots + \delta(t) + \cdots + \delta(t - kT) + \cdots$ ,  $f(t) = g_\tau(t)$ , 波形如图 2-39(a) 和 (b) 所示, 求  $y(t) = f(t) * \delta_T(t)$ 。

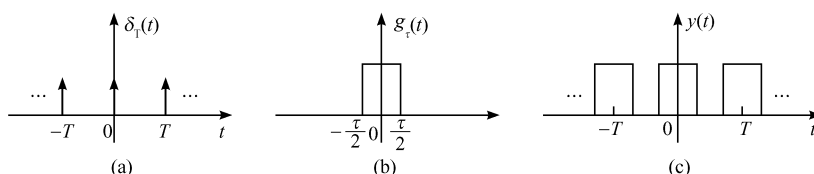


图 2-39 例 2-22 的波形

解: 根据卷积运算的分配律和式(2-56), 有

$$f(t) * \delta_T(t) = f(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT)$$

在  $g_\tau(t)$  的宽度  $\tau < T$  时, 所得卷积波形如图 2-39(c) 所示; 若  $\tau > T$  则在  $f(t) * \delta_T(t)$  的波形中, 各相邻脉冲将相互重叠。这是用周期冲激信号来表示周期信号的方法。

## 2.6 连续系统的时域分析

前面介绍了连续系统的零输入响应和零状态响应的分析方法, 将二者结合起来就是连续系统的时域分析法。这种时域分析方法的思路可归纳为

系统全响应  $y(t)$   $\begin{cases} y_x(t): \text{齐次微分方程} \rightarrow \text{齐次解} \rightarrow \text{代入初始条件} \rightarrow y_x(t) \\ y_f(t): \text{微分方程} \rightarrow h(t) \rightarrow f(t) * h(t) = y_f(t) \end{cases}$

下面是几个用时域分析法分析系统响应的例子。

【例 2-23】 电路如图 2-40(a) 所示, 已知  $f(t) = (1 + e^{-3t})U(t)$ , 如图 2-40(b) 所示。  $u_C(0^-) = 1V$ , 求  $u_C(t)$ 。

解: 首先写出系统的微分方程( $f(t)$  与  $u_C(t)$  之间的关系)为

$$u'_C(t) + u_C(t) = f(t)$$

(1) 求零输入响应  $u_x(t)$ 。由齐次微分方程得特征方程为

$$\lambda + 1 = 0$$

特征根  $\lambda = -1$ , 故有

$$u_x(t) = Ce^{-t}U(t)$$

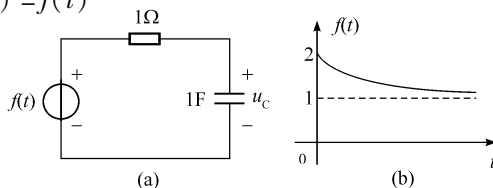


图 2-40 例 2-23 的图

将  $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 1$  代入上式得  $C = 1$ , 所以

$$u_x(t) = e^{-t}U(t)$$

(2) 求零状态响应  $u_f(t)$ 。对于冲激响应  $h(t)$  有

$$h'(t) + h(t) = \delta(t)$$

令  $h(t) = Ce^{-t}U(t)$ , 将其代入上式得

$$-Ce^{-t}U(t) + C\delta(t) + Ce^{-t}U(t) = \delta(t)$$

从而得  $C = 1$ 。所以

$$h(t) = e^{-t}U(t)$$

根据时域分析法, 零状态响应为

$$\begin{aligned} u_f(t) &= f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + e^{-3\tau})U(\tau) \cdot e^{-(t-\tau)}U(t-\tau) d\tau \\ &= \left[ \int_0^t (1 + e^{-3\tau}) \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau \right] U(t) = \left[ e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau + \int_0^t e^{-3\tau} \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau \right] U(t) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right) U(t) \end{aligned}$$

所以电容电压的全响应为

$$\begin{aligned} u_c(t) &= u_x(t) + u_f(t) \\ &= e^{-t}U(t) + \left( 1 - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right) U(t) \\ &= \left( 1 + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right) U(t) \end{aligned}$$

**【例 2-24】** 图 2-41(a) 的复合系统由三个子系统组成, 已知各子系统的冲激响应如图 2-41(b) 所示。当激励  $f(t) = U(t)$  时, 求该系统的响应  $y(t)$ 。

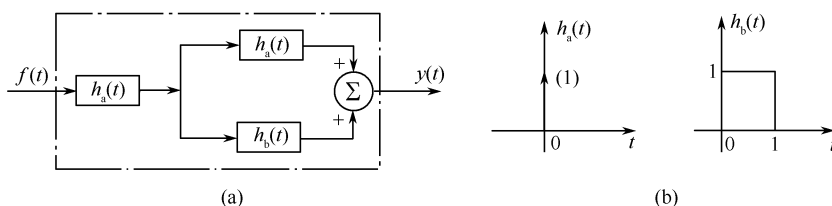


图 2-41 例 2-24 的图

**解:** 复合系统的冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= h_a(t) * h_a(t) + h_a(t) * h_b(t) \\ &= \delta(t) * \delta(t) + \delta(t) * h_b(t) \\ &= \delta(t) + h_b(t) \end{aligned}$$

所以系统的响应(指零状态响应)为

$$\begin{aligned} y_f(t) &= f(t) * h(t) = U(t) * [\delta(t) + h_b(t)] \\ &= U(t) + U(t) * h_b(t) \\ &= U(t) + U(t) * [U(t) - U(t-1)] \\ &= U(t) + U(t) * U(t) - U(t) * U(t-1) \\ &= U(t) + tU(t) - (t-1)U(t-1) \\ &= (t+1)U(t) - (t-1)U(t-1) \end{aligned}$$

## 2.7 MATLAB 应用举例

### 2.7.1 连续信号的 MATLAB 表示

MATLAB 提供了一系列用于表示基本信号的函数,包括 square(周期方波)、sawtooth(周期锯齿波)、rectpuls(非周期矩形脉冲)、tripuls(非周期三角脉冲)、exp(指数信号)、sinc(抽样函数)、sin(正弦信号)、cos(余弦信号)等。下面给出若干例子说明它们的用法。

#### 1. 周期方波

周期方波信号在 MATLAB 中用 square 表示,其调用格式为

```
y = square(t,duty)
```

调用后产生一个幅度为  $\pm 1$ ,周期为  $2\pi$  的方波。duty 参数用于指定非负值波形在一个周期中所占的百分比,缺省值为 50。

下面的代码将产生一个周期为 2,峰峰值为  $\pm 0.5$  的方波,并可画出其在区间  $[-4,4]$  上的波形,如图 2-42 所示。

```
% Program ch2_1
T=2;
A=0.5;
t=-2*T:0.01:2*T;
y=A*square(pi*t);
plot(t,y);
box off;
axis([t(1)-0.2 t(end)+0.2 -A-0.1
A+0.1]);
```

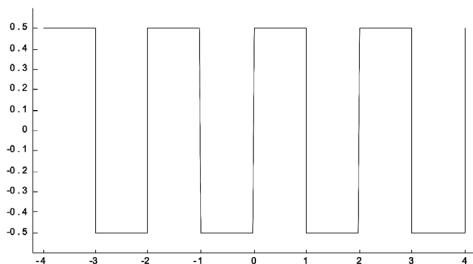


图 2-42 周期方波的波形

#### 2. 抽样函数 $Sa(t)$

抽样函数  $Sa(t)$  在 MATLAB 中可以用 sinc 函数表示,后者的定义为

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} 1, & t=0 \\ \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \end{cases}$$

其调用格式为  $y = \text{sinc}(t)$

下面的代码将产生抽样函数  $Sa(t)$  并可画出其在区间  $[-4\pi, 4\pi]$  上的波形,如图 2-43 所示。

```
% Program ch2_2
t=linspace(-4*pi,4*pi,500);
y=sinc(t/pi);
```

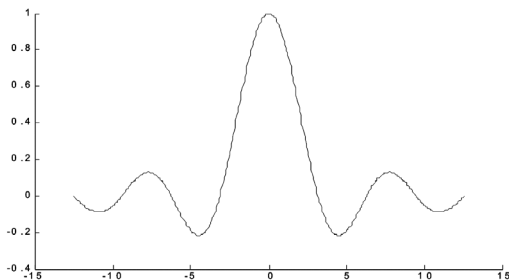


图 2-43  $Sa(t)$  的波形

```
plot(t,y);
box off;
```

其他信号的产生可以参考以上的各个函数,这些函数的具体用法可以通过 help 命令获得。产生这些信号的代码与上述两个信号相似。

## 2.7.2 信号基本运算的 MATLAB 实现

利用 MATLAB 可以方便地实现信号的尺度变换、翻转和平移等运算,并可方便地用图形表示。

**【例 2-25】** 对图 2-44(a) 所示的三角波  $f(t)$ , 试用 MATLAB 编程画出  $f(2t)$  和  $f(1 - \frac{1}{2}t)$  的波形。

**解:**编程如下,所得波形如图 2-44 所示。

```
% Program ch2_3
% f(t)
t = -3:0.01:3;
y = tripuls(t,4,0.6);
subplot(211);
plot(t,y);
title('f(t)');
xlabel('a');
box off;
% f(2t)
y1 = tripuls(2*t,4,0.6);
subplot(223);
plot(t,y1);
title('f(2t)');
xlabel('b');
box off;
% f(1-t/2)
t1 = 2-2*t;
y2 = tripuls((1-0.5*t1),4,0.6);
subplot(224);
plot(t1,y2);
title('f(1-0.5t)');
xlabel('c');
box off;
```

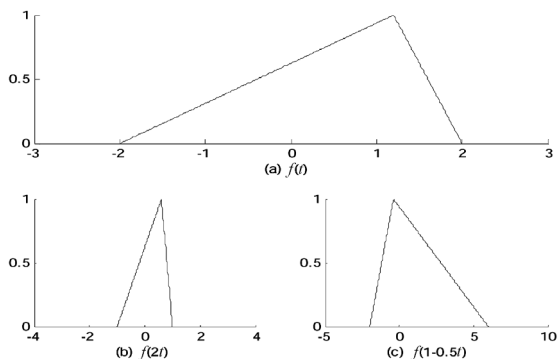


图 2-44 例 2-25 的图

## 2.7.3 利用 MATLAB 进行系统的时域分析

利用 MATLAB 提供的函数可以方便地求出系统的单位样值响应和零状态响应的数值解,所得结果可绘图直观表示。

## 1. 系统单位冲激响应和阶跃响应的求解

MATLAB 中求解连续系统冲激响应的函数是 `impulse`, 求解阶跃响应的函数是 `step`。它们的一般调用格式为

```
h = impulse(sys,t)
g = step(sys,t)
```

其中, `t` 表示响应的时间抽样点向量, `sys` 是 LTI 系统的模型, 由函数 `tf`, `zpk` 或 `ss` 产生。大多数情形下是已知系统的微分方程或系统函数, 此时 `sys` 由 `tf` 产生, 调用格式为

```
sys = tf(num,den)
```

其中, `num` 和 `den` 分别为微分方程右端和左端的系数向量。例如, 一个二阶微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f''(t) + f(t)$$

则 `num = [2 0 1]`, `den = [1 3 2]`。如果已知系统函数, 则 `num` 和 `den` 分别是其分子、分母多项式按降幂排列的系数向量。例如,  $H(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$ , 则 `num = [0 1 1]`, `den = [1 5 6]`。

【例 2-26】 已知一个因果 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$$

用 MATLAB 求系统的冲激响应和阶跃响应, 绘图并与理论值比较。

解: 容易求得系统的单位冲激响应和阶跃响应的表达式 (理论值) 分别为

$$h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})U(t), \quad g(t) = \left(\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)U(t)$$

用 MATLAB 编程如下。程序运行结果如图 2-45 所示。由图可知, MATLAB 计算结果与理论值一致。

```
% Program 2_4
num = 1; den = [1 3 2];
sys = tf(num,den);
t = 0:0.01:6;
ht = impulse(sys,t);
gt = step(sys,t);
ha = exp(-t) - exp(2*t);
ga = 0.5 - exp(-t) + 0.5 * exp(-2*t);
subplot(211);
plot(t,ht,'-',t,ha,'-.');
box off;
xlabel('a');
title('Impulse response');
subplot(212);
plot(t,gt,'-',t,ga,'-.');
xlabel('b');
box off;
title('Step response');
```

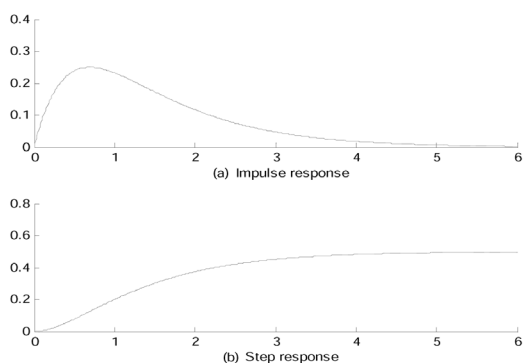


图 2-45 例 2-26 的图

## 2. 卷积积分的计算

利用 MATLAB 中计算卷积和的函数 `conv`, 可以近似计算连续信号的卷积积分。`conv` 的调用格式为

$$y = \text{conv}(f, h)$$

其中,  $f$  和  $h$  是两个进行卷积的序列,  $y$  是卷积的结果。

**【例 2-27】** 利用 `conv` 计算图 2-46(a) 和 (b) 所示的两个不等宽的矩形脉冲信号的卷积并绘图表示结果。

**解:** 求解过程编程如下。

```
% Program 2_5
dt = 0.01;
t1 = 0:dt:2;
L = length(t1);
ft = ones(1,L);
subplot(2,2,1);
plot(t1,ft);
axis([0 3 0 1.5]);
hold on;
plot([2 2],[0 1]);
title('f(t)');
xlabel(' (a) ');
box off;
t2 = 0:dt:4;
M = length(t2);
ht = ones(1,length(t2));
subplot(2,2,2);
plot(t2,ht);
axis([0 5 0 1.5]);
hold on;
plot([4 4],[0 1]);
title('h(t)');
xlabel(' (b) ');
box off;
y = conv(ft,ht) * dt;
N = L + M - 1;
t = (0:N-1) * dt;
subplot(2,1,2);
plot(t,y);
axis([t(1)-0.5 t(end)+0.5 0 max(y)+0.5]);
title('y(t) = f(t) * h(t)');
```

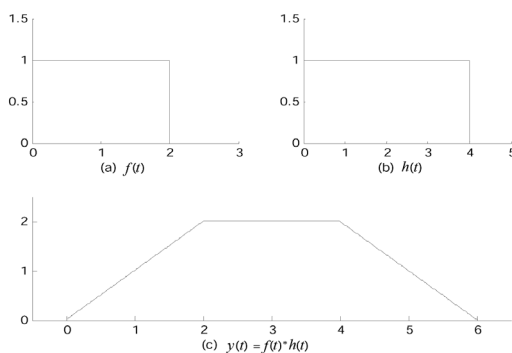


图 2-46 例 2-27 的图

```

xlabel('c');
box off;
hold off;

```

运行后所得结果的波形如图 2-46(c) 所示。由理论计算可知,  $f(t)$  与  $h(t)$  卷积的波形是一个等腰梯形, 用 MATLAB 求得的结果与此一致。

### 3. 利用 MATLAB 求解零状态响应

LTI 连续系统的零状态响应可以用卷积方法求得, 也可以用 MATLAB 提供的函数 `lsim` 直接求得, 其调用格式为

```
y = lsim(sys, f, t)
```

其中,  $t$  表示系统响应的的时间抽样点向量,  $f$  是输入信号,  $sys$  是系统模型。

**【例 2-28】** 求例 2-26 中的系统在  $f(t) = U(t)$  作用下的零状态响应。

**解:** 此处的响应其实就是阶跃响应, 用 `lsim` 直接求解, 并与例 2-26 比较。求解的 MATLAB 程序如下, 程序运行结果如图 2-47 所示。

```

% Program ch2_6
sys = tf(1, [1 3 2]);
t = 0:0.01:6;
f = ones(1, length(t));
y = lsim(sys, f, t);
gt = step(sys, t);
plot(t, y, '-', t, gt, '-.');
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
box off;
title('Zero state response');

```

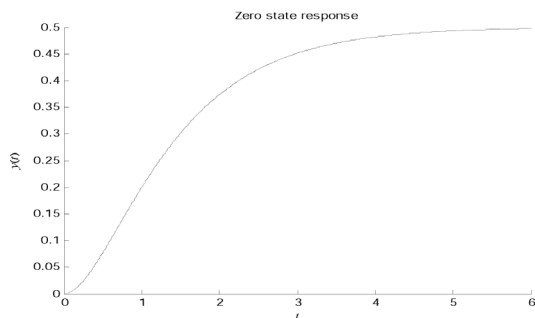


图 2-47 例 2-28 的图

## 本章关键概念小结

- 信号的三个基本运算是平移、反折、尺度变换。
- 冲激信号是一个宽度为零, 具有单位面积的脉冲。
- 面积为  $A$  的冲激信号称为强度为  $A$  的冲激。
- 冲激信号的积分得到阶跃信号, 阶跃信号的微分得到冲激信号。
- 阶跃信号在  $t < 0$  时等于 0,  $t > 0$  时等于 1。
- 冲激信号的重要性质有筛选性、取样性、尺度变换。冲激偶也有相应的特性。
- 时域分析是以时间变量  $t$  为变量的分析。
- 系统对初始条件的响应称为零输入响应。
- 系统对输入信号的响应称为零状态响应。
- 冲激响应是系统对在  $t = 0$  时的冲激信号输入所产生的零状态响应。

- 阶跃响应是系统对阶跃信号输入所产生的零状态响应。
- 系统是因果的当且仅当对  $t < 0$  时  $h(t) = 0$ 。
- 系统的零状态响应等于激励信号与冲激响应的卷积积分。
- 卷积积分的计算有两种方法:定义法和图解法。
- 卷积积分具有一些重要的性质:代数律、微分积分、与奇异信号卷积等,利用这些性质使卷积积分运算简便。
- 时域分析方法就是将全响应分解为零输入响应和零状态响应,通过分别求取二者,然后叠加得到全响应。

## 习题

2.1 已知信号  $f(t)$  波形如图 2-48 所示,分别按如下顺序求  $f(-2t+1)$  波形并加以比较。

- (1) 时移、反折、展缩
- (2) 展缩、时移、反折
- (3) 反折、展缩、时移

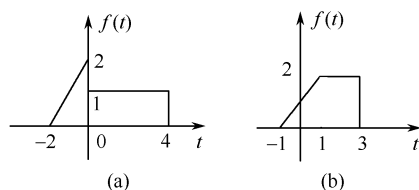


图 2-48

2.2 分别用分段信号和阶跃信号写出图 2-49 所示各信号的表达式。

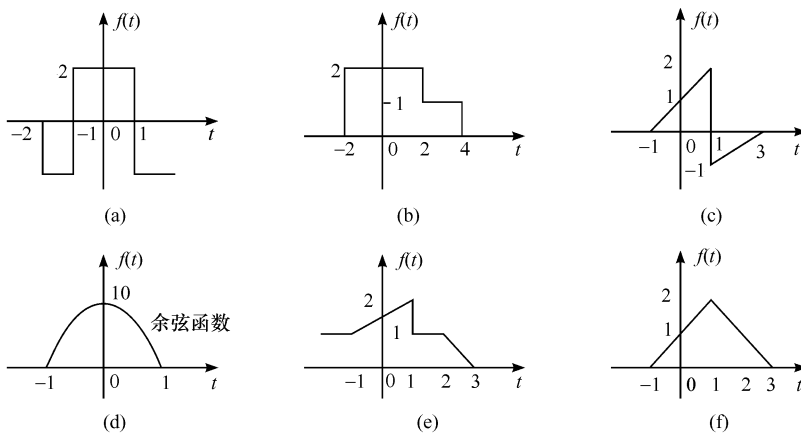


图 2-49

2.3 粗略绘出下列各信号的波形图。

- (1)  $f(t) = (2 - 3e^t)U(t)$
- (2)  $f(t) = 2U(t+1) - 3U(t-1) + U(t+2)$
- (3)  $f(t) = tU(t) - 2(t-1)U(t-1) + U(t-2)$
- (4)  $f(t) = tU(t) \cdot U(2-t)$
- (5)  $f(t) = 2tU(2t) \cdot U(2-t)$
- (6)  $f(t) = e^{-t} \cos 10\pi t [U(t-1) - U(t-2)]$
- (7)  $f(t) = \left(1 - \frac{|t|}{2}\right) [U(t+2) \cdot U(t-2)]$
- (8)  $f(t) = e^{-|t|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$

2.4 已知信号  $f(t)$  如图 2-50 所示,试分别绘出下列各信号的波形图。

- (1)  $f(1-t)$
- (2)  $f(2t+2)$
- (3)  $f\left(2 - \frac{t}{3}\right)$
- (4)  $[f(t) + f(2-t)] \cdot U(1-t)$

2.5 求下列积分。



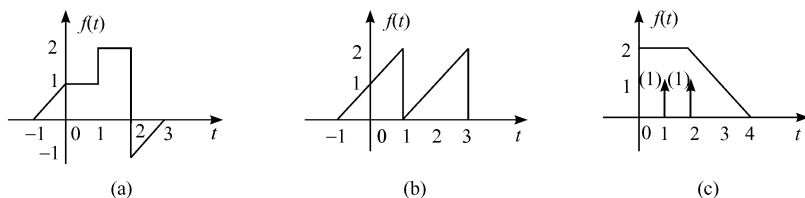


图 2-50

(1) 已知  $f(5-2t) = 2\delta(t-3)$ , 求  $\int_{0-}^{\infty} f(t) dt$ 。

(2) 已知  $f(t) = 2\delta(t-3)$ , 求  $\int_{0-}^{\infty} f(5-2t) dt$ 。

2.6 计算下列各题并比较结果。

(1)  $f(t) = (t^2 - 2t + 3)\delta(t)$

(2)  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - 2t + 3)\delta(t) dt$

(3)  $f(t) = \int_{-\infty}^t (\tau^2 - 2\tau + 3)\delta(\tau) d\tau$

(4)  $f(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

(5)  $f(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - 2) d\tau$

(6)  $f(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\tau}\delta(\tau) d\tau$

(7)  $f(t) = \int_{-1}^1 (t^2 - 3t + 1)\delta(t-2) dt$

(8)  $f(t) = \int_{-1}^4 (t^2 - 3t + 1)\delta(t-2) dt$

(9)  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \delta'(t-2) dt$

(10)  $f(t) = \int_{-\infty}^t \tau^2 \delta'(\tau-2) d\tau$

(11)  $f(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{2}{\tau} [U(t) - U(t-\tau)]$

(12)  $f(t) = \frac{d}{dt} [U(t) - 2tU(t-1)]$

2.7 利用冲激信号及其各阶导数的性质, 计算下列各式。

(1)  $f(t) = e^{-5t-1}\delta(t)$

(2)  $f(t) = \frac{d}{dt} [e^{-3t}\delta(t)]$

(3)  $f(t) = \int_{-\infty}^t e^{-2\tau}\delta'(\tau) d\tau$

(4)  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5t}\delta''(t) dt$

(5)  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2 - 9) dt$

(6)  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(t) \frac{\sin 2t}{t} dt$

(7)  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(t-4)U(t-8) dt$

(8)  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 2(t^3 + 4)\delta(1-t) dt$

(9)  $f(t) = \int_{-1}^3 \delta'(t-2) \cos \frac{\pi}{4} t dt$

(10)  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} [\delta(t) + \delta'(t)] dt$

(11)  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (t + \sin t) \delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt$

(12)  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2t} [\delta(t) - \delta(t-1)] dt$

(13)  $f(t) = \frac{d^2}{dt^2} [(\cos t + \sin 2t)U(t)]$

(14)  $f(t) = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-|t|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) dt$

(15)  $f(t) = (t^2 + 2t)\delta(2t-1)$

(16)  $f(t) = (t^2 + 2t + 1)\delta'(t-1)$

2.8\* 试判断下列信号是否是周期的。若是, 试求出其周期。

(1)  $\cos 10t - \cos 30t$

(2)  $e^{-j20t}$

(3)  $(\cos 4t)^2$

(4)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [U(t-2n) - U(t-2n-2)]$

(5)  $\sin 4t + \cos 6t$

(6)  $a \sin 2t + b \cos \pi t$

(7)  $\cos \pi(t-3)$

(8)  $(\sin \pi t)^2$

(9)  $|\sin 2.5t|$

(10)  $(\sin 2t + \cos 5t)^2$

(11)  $a \sin \frac{3}{2}t + b \cos \frac{16}{15}t - c \sin \frac{1}{29}t$

2.9 已知电路如图 2-51 所示,求响应  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$  与  $f(t)$  关系的微分方程。

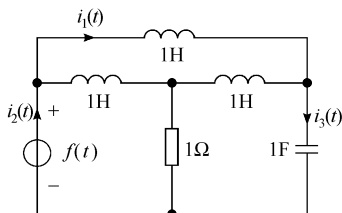


图 2-51

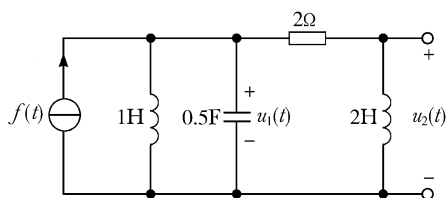


图 2-52

2.10 已知电路如图 2-52 所示,求响应  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  的微分方程。

2.11 已知电路如图 2-53 所示,求响应  $u_0(t)$  对激励信号  $f(t)$  的微分方程。

2.12 求下列齐次方程的解。

(1)  $y''(t) + 9y(t) = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$

(2)  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$

(3)  $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -2$

(4)  $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$

2.13 已知激励为零时刻加入,求下列系统的零输入响应。

(1)  $y''(t) + y(t) = f'(t)$ ,  $y(0^-) = 2$ ,  $y'(0^-) = 0$

(2)  $y'''(t) + 4y''(t) + 5y'(t) + 2y(t) = f'(t) + f(t)$ ,  $y(0^-) = 0$ ,  $y'(0^-) = 1$ ,  $y''(0^-) = -1$

(3)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ ,  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = 0$

(4)  $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = f(t)$ ,  $y_x(0^+) = 1$ ,  $y'_x(0^+) = 2$

(5)  $y'''(t) + 2y''(t) + y'(t) = f''(t) + f(t)$ ,  $y_x(0^+) = 0$ ,  $y'_x(0^+) = 0$ ,  $y''_x(0^+) = 1$

2.14 系统框图如图 2-54 所示,试列出系统的微分方程,求单位冲激响应。

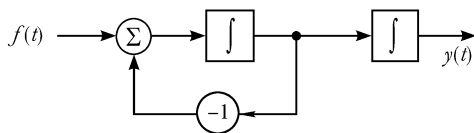


图 2-54

2.15 系统框图如图 2-55 所示。(1) 列出系统的微分方程;(2) 求单位冲激响应。

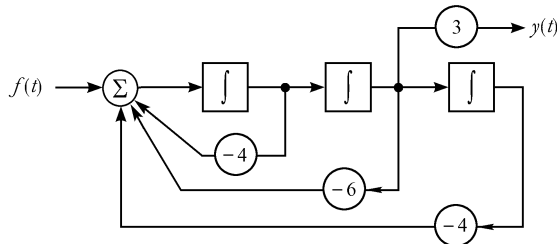


图 2-55

2.16 已知系统的微分方程如下,计算各系统的单位冲激响应。

(1)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d}{dt}f(t) + 3f(t)$

(2)  $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 6\frac{d}{dt}y(t) + 9y(t) = f(t)$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}f(t) \\
(4) \quad & \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3 \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d^3}{dt^3}f(t) + f(t) \\
(5) \quad & \frac{d^3}{dt^3}y(t) + 4 \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5 \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = \frac{d^2}{dt^2}f(t) + 2 \frac{d}{dt}f(t) + f(t) \\
(6) \quad & \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 7 \frac{d}{dt}y(t) + 12y(t) = f(t) \\
(7) \quad & \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2 \frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = f(t)
\end{aligned}$$

2.17 根据卷积的定义,求下列信号的卷积积分  $f_1(t) * f_2(t)$ 。

- (1)  $f_1(t) = tU(t)$ ,  $f_2(t) = e^{-2t}U(t)$
- (2)  $f_1(t) = tU(t)$ ,  $f_2(t) = U(t)$
- (3)  $f_1(t) = tU(t)$ ,  $f_2(t) = U(t) - U(t-2)$
- (4)  $f_1(t) = tU(t-1)$ ,  $f_2(t) = U(t-3)$
- (5)  $f_1(t) = e^{-2t}U(t)$ ,  $f_2(t) = e^{-3t}U(t)$
- (6)  $f_1(t) = \sin t U(t)$ ,  $f_2(t) = \sin t U(t)$
- (7)  $f_1(t) = U(t) - U(t-4)$ ,  $f_2(t) = \sin \pi t U(t)$
- (8)  $f_1(t) = \delta(t-1)$ ,  $f_2(t) = \cos(\pi t + 45^\circ)$
- (9)  $f_1(t) = (1+t)[U(t) - U(t-1)]$ ,  $f_2(t) = U(t-1) - U(t-2)$
- (10)  $f_1(t) = e^{-2t}U(t)$ ,  $f_2(t) = \sin t U(t)$

2.18 已知某 LTI 系统的单位冲激响应为  $h_1(t)$ , 当输入为  $f_1(t)$  时输出  $y(t)$  如图 2-56 所示, 求当冲激响应和输入分别为以下各组信号时的输出  $y(t)$ , 并画出图形。

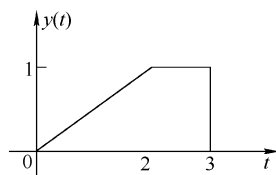


图 2-56

- (1)  $f(t) = f_1(t)$ ,  $h(t) = 3h_1(t)$
- (2)  $f(t) = f_1(-t)$ ,  $h(t) = h_1(-t)$
- (3)  $f(t) = f_1(t+2)$ ,  $h(t) = h_1(t-1)$
- (4)  $f(t) = f_1(t) - f_1(t+2)$ ,  $h(t) = h_1(t-1)$
- (5)  $f(t) = f'_1(t)$ ,  $h(t) = h_1(t)$
- (6)  $f(t) = f_1(t)$ ,  $h(t) = h'_1(t)$
- (7)  $f(t) = f'_1(t)$ ,  $h(t) = h'_1(t)$

2.19 已知系统的单位阶跃响应  $g(t) = \delta(t) - e^{-2t}U(t)$ , 求单位冲激响应  $h(t)$ 。

2.20 已知系统的单位阶跃响应  $g(t) = tU(t) - 2e^{-2t}U(t)$ , 求单位冲激响应  $h(t)$ 。

2.21 已知系统框图如图 2-57 所示。求当:

- (1)  $f(t) = U(t)$  时的零状态响应;
- (2)  $f(t) = U(t-1) - U(t-2)$  时的零状态响应。

2.22 已知 LTI 系统框图如图 2-58 所示, 三个子系统的冲激响应分别为  $h_1(t) = U(t) - U(t-1)$ ,  $h_2(t) = U(t)$ ,  $h_3(t) = \delta(t)$ , 求总系统冲激响应  $h(t)$ 。

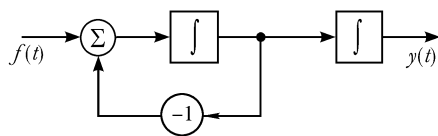


图 2-57

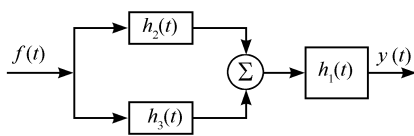


图 2-58

2.23 已知 LTI 系统框图如图 2-59 所示, 子系统的冲激响应分别为  $h_2(t) = \delta(t-1)$  (单位延时器),  $h_3(t) = -\delta(t)$  (倒相器), 总系统冲激响应  $h(t) = U(t) - U(t-1)$ , 求子系统冲激响应  $h_1(t)$ , 并说明此系统

是什么系统。

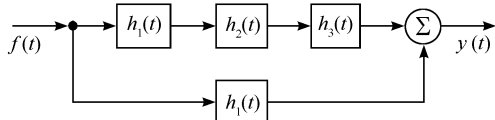


图 2-59

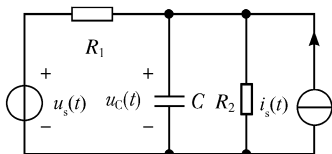


图 2-60

2.24 已知系统的微分方程和外加激励,求其零状态响应。

- (1)  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3f(t)$ ,  $f(t) = e^{-t}U(t)$
- (2)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) + 4f(t)$ ,  $f(t) = e^{-2t}U(t)$
- (3)  $y'(t) + 2y(t) = f'(t) + f(t)$ ,  $f(t) = e^{-2t}U(t)$
- (4)  $y'''(t) + 4y''(t) + 8y'(t) = 3f'(t) + 8f(t)$ ,  $f(t) = U(t)$

2.25 求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

- (1)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ ,  $f(t) = -2e^{-t}U(t)$ ,  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = 2$
- (2)  $y'(t) + 2y(t) = f(t)$ ,  $f(t) = \sin 2tU(t)$ ,  $y(0^-) = 1$
- (3)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ ,  $f(t) = e^{-t}U(t)$ ,  $y(0^-) = y'(0^-) = 1$

2.26\* 如图 2-60 所示电路中,已知当  $u_s(t) = U(t)$  V,  $i_s(t) = 0$  A 时,  $u_C(t) = (2e^{-2t} + 0.5)$  V,  $t \geq 0$ ; 当  $u_s(t) = 0$  V,  $i_s(t) = U(t)$  A 时,  $u_C(t) = (0.5e^{-2t} + 2)$  V,  $t \geq 0$ 。

- (1) 求  $R_1$ ,  $R_2$  和  $C$ ;
- (2) 求电路的全响应,并指出零输入响应、零状态响应。

2.27\* 一 LTI 系统,初始状态不详。当激励为  $f(t)$  时其全响应为  $(2e^{-3t} + \sin 2t)U(t)$ ; 当激励为  $2f(t)$  时其全响应为  $(e^{-3t} + 2\sin 2t)U(t)$ 。求:

- (1) 初始状态不变,当激励为  $f(t-1)$  时的全响应,并指出零输入响应、零状态响应;
- (2) 初始状态是原来的两倍,激励为  $2f(t)$  时的全响应。

2.28\* 已知 LTI 系统的冲激响应  $h(t) = e^{-2t}U(t)$ , 求:

- (1) 激励信号  $f(t) = e^{-t}[U(t) - U(t-2)] + \beta\delta(t-2)$  时系统的零状态响应;若要系统在  $t > 2$  时响应为零,则  $\beta$  应为多少?
- (2) 激励信号  $f(t) = f_1(t)[U(t) - U(t-2)] + \beta\delta(t-2)$ , 其中  $f_1(t)$  为任意时间信号,若系统在  $t > 2$  时响应为零,  $\beta$  应为多少? 验证(1)的结果。

2.29\* 电路如图 2-61 所示,已知  $f(t) = 6e^{-3t}U(t)$  V,  $i_1(0^-) = i_2(0^-) = i_3(0^-) = 1$  A, 求全响应  $i_3(t)$ , 并指出零输入响应和零状态响应分量,强迫响应和自由响应分量,暂态响应和稳态响应分量。

2.30\* 已知某 LTI 系统的输入输出关系为

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} f(\tau - 2) d\tau$$

- (1) 求该系统的单位冲激响应;
- (2) 当输入信号如图 2-62 所示时,求系统的响应。

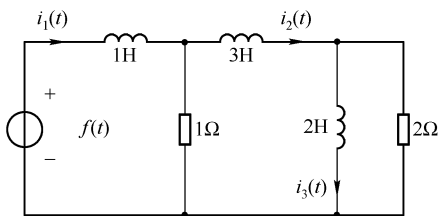


图 2-61

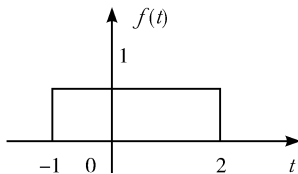


图 2-62

## 上机练习

2.1 用一组 MATLAB 命令画出幅度为 3V、基频为 50Hz 的锯齿波,画出其中的 4 个周期。

2.2 已知信号  $f(t)$  的波形如图 2-63 所示,用 MATLAB 画出  $f(3-2t)$  的波形。

2.3 用 MATLAB 计算  $\text{sinc}(t)$  与  $\text{sinc}(t)$  的卷积,画出波形,观察波形,你能得出什么结论?

2.4 已知某因果 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t) + \sqrt{2}y'(t) + y(t) = f(t)$$

输入信号  $f(t) = U(t) - U(t-2)$ ,利用 MATLAB,求:

- (1) 系统的单位冲激响应和阶跃响应,绘出响应波形;
- (2) 用函数 `lsim` 计算系统的零状态响应,绘出响应波形;
- (3) 用卷积的方法计算系统的零状态响应,绘出响应波形并与(2)比较。

2.5 已知巴特沃思二阶带通滤波器的微分方程为

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = f'(t)$$

输入信号  $f(t) = \text{sinc}(t)$ ,求

- (1) 用函数 `lsim` 计算系统的零状态响应;
- (2) 用 `conv` 计算系统零状态响应的近似解;
- (3) 绘出(1),(2)的响应波形并比较。

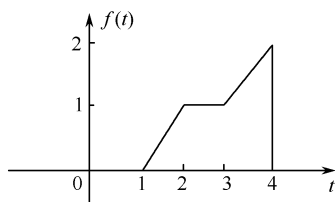


图 2-63

# 第3章 连续时间信号与系统的频域分析

## 内 容 提 要

从本章开始,连续系统的分析方法将从时域分析转到变换域分析。本章讨论频率域分析法,即傅里叶分析法,包括周期与非周期信号的傅里叶分析求取其频谱、傅里叶变换的性质、在频率域中求取系统响应的方法及描述系统频率特性的系统函数等。傅里叶分析方法不仅用于通信和控制领域中,在其他领域,如光学、力学中也有广泛应用。

## 3.1 周期信号的傅里叶级数分析

### 3.1.1 三角函数形式的傅里叶级数

由数学分析课程中傅里叶级数的定义得到,周期信号 $f(t)$ 可由三角函数的线性组合来表示。若周期信号 $f(t)$ 的周期为 $T$ ,角频率为 $\omega_0 = 2\pi/T$ ,则 $f(t)$ 可分解为

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \cdots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \cdots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

式中, $n$ 为正整数,各项三角函数的振幅 $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ 称为傅里叶级数的系数。式(3-1)称为三角形式的傅里叶级数。各傅里叶级数系数的含义和计算公式如下:

$$\text{直流分量} \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (3-2)$$

$$\text{余弦分量} \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt, \quad n=1, 2, \cdots \quad (3-3)$$

$$\text{正弦分量} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt, \quad n=1, 2, \cdots \quad (3-4)$$

为方便起见,一般积分区间都取为 $0 \sim T$ 或 $-T/2 \sim T/2$ 。

三角函数集 $\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \cdots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cdots\}$ 在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 中组成正交函数集,而且是完备的正交函数集。周期信号 $f(t)$ 可以由 $n$ 个正交函数的线性组合来近似表达。这种正交函数集可以是三角函数集,也可以是复指数集等。关于完备正交函数集及其性质在此不做详细讨论,可以参考相关书籍。

必须指出,并非任意周期信号都可以分解为式(3-1)的傅里叶级数。能分解为式(3-1)的周期信号要满足所谓的狄里赫利(Dirichlet)条件,即

(1) 在一个周期内,如果有间断点存在,则间断点的数目应是有限个。

(2) 在一个周期内,极大值和极小值的数目应是有限个。

(3) 在一个周期内,信号是绝对可积的,即 $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt$ 等于有限值。通常遇到的周期信

号都满足该条件,以后不再特别说明。

由式(3-1)可知,将周期信号 $f(t)$ 展开成傅里叶级数,就可以知道信号 $f(t)$ 中直流分量的大小,频率为 $\omega_0$ 的信号分量的振幅和相位,以及频率为 $2\omega_0$ 的信号分量的振幅和相位等。通常称频率为 $\omega_0$ 的信号为基波分量,频率为 $2\omega_0$ 的信号为二次谐波分量,依次类推为三次谐波、四次谐波等,这些分量就表明了信号 $f(t)$ 的频率特性。这种频率特性(频谱)在稍后介绍。

但式(3-1)中的各次谐波的振幅和相位直观上看还不很清楚,进一步将式(3-1)中的同频率信号相合并,可以写出另一种形式的三角型傅里叶级数表达式为

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (3-5)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= a_0 \\ A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n=1, 2, \dots, & a_n &= A_n \cos \varphi_n \\ \varphi_n &= \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right), & b_n &= -A_n \sin \varphi_n \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

这样,若将周期信号分解为式(3-5)的傅里叶级数,则该信号中所含的频率分量的情况便一清二楚了。

从式(3-3)和式(3-4)可知, $a_n$ 与 $b_n$ 都是 $n\omega_0$ 的函数,所以 $A_n$ 和 $\varphi_n$ 也都是 $n\omega_0$ 的函数。若 $n$ 取负值,可知 $a_n$ 与 $A_n$ 是 $n$ 的偶函数, $b_n$ 与 $\varphi_n$ 是 $n$ 的奇函数。如果将 $A_n$ 对 $n\omega_0$ 的关系绘成图形, $n\omega_0$ 用 $\omega$ 表示,即 $\omega = n\omega_0, n=0, 1, 2, \dots$ ,以 $\omega$ 为横轴,所对应的 $A_n$ 为纵轴,就可以画成一种线图,直观地表明信号 $f(t)$ 的各频率分量的振幅。这种 $A_n$ 与 $n\omega_0(\omega)$ 之间关系的图称为信号的幅度频谱(幅度谱),每一条线表示某一频率分量的振幅,称为谱线,连接各谱线顶点的曲线称为包络,反映了各分量幅度变化的情况。

类似地,还可以画出 $\varphi_n$ 与 $n\omega_0(\omega)$ 之间的线图,称为信号的相位频谱(相位谱),反映了各分量相位关系。周期信号的幅度谱和相位谱组成信号的频率谱(频谱),如图3-1所示。相应地,若已知某个信号的频谱,也可以重构此信号。所以频谱提供了另一种描述信号的方法,即不同的信号,频谱不同。时域周期信号 $f(t)$ 可以用其相应的频谱来描述,这种信号的描述方法就叫信号的频域分析。时域描述和频域描述从不同角度给出了信号的特征,是分析系统的基础。

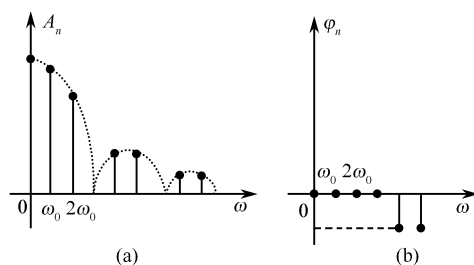


图 3-1 周期信号的频谱

【例 3-1】 将图 3-2(a) 所示的周期矩形脉冲信号展开成三角型傅里叶级数,并画出其频谱。

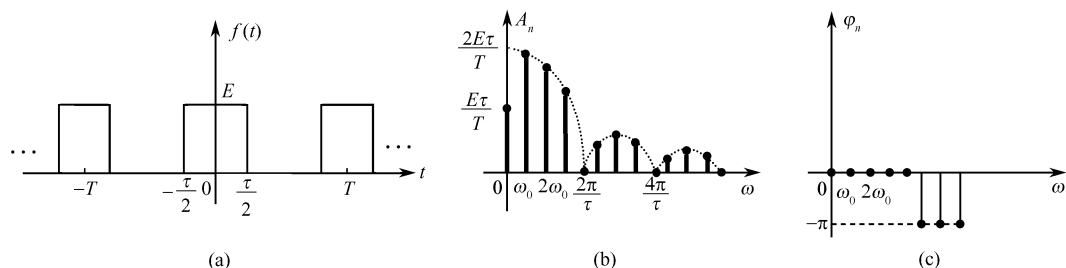


图 3-2 例 3-1 的图

**解:** 周期矩形脉冲信号在一个周期  $\left(-\frac{T}{2} \sim \frac{T}{2}\right)$  内可表示为

$$f(t) = \begin{cases} E, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}; \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

由式(3-2) ~ 式(3-4) 求出各傅里叶系数为

$$a_0 = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 1/T \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E dt = \frac{E\tau}{T}$$

$$a_n = 2/T \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt = 2/T \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cos \frac{2n\pi}{T} t dt = \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

所以  $f(t)$  可展开为 
$$f(t) = \frac{E\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \cos n\omega_0 t$$

为了画出频谱, 求出振幅和相位为

$$A_0 = a_0, A_n = |a_n|, \varphi_n = \arctan 0 = \begin{cases} 0, & a_n > 0 \\ -\pi \text{ 或 } \pi, & a_n < 0 \end{cases}$$

画出幅度谱和相位谱如图 3-2(b) 和(c) 所示。

**【例 3-2】** 已知某信号的频谱如图 3-3 所示, 求该信号的表达式。

**解:** 由信号的频谱可以清楚地得出该信号各频率分量的振

幅和相位, 即

直流分量

$$A_0 = 1$$

基波分量

$$A_1 = 1/2, \quad \varphi_1 = -\pi/2$$

二次谐波分量

$$A_2 = 1/4, \quad \varphi_2 = \pi/3$$

其他频率分量均为零。故可写出  $f(t)$  的表达式为

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)$$

可见, 周期信号的频谱有共同的特性, 即所有周期信号的频谱都是由间隔为  $\omega_0$  的谱线组成, 为离散谱。

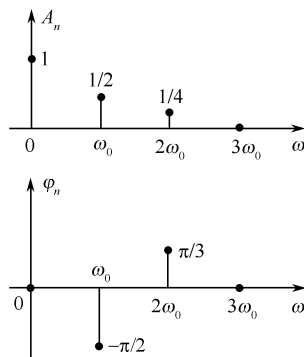


图 3-3 例 3-2 信号的频谱

### 3.1.2 指数形式的傅里叶级数

周期信号的傅里叶级数也可以表示为指数形式。由式(3-1) 知

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

将欧拉公式  $\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$ ,  $\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$

代入上式得 
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - jb_n}{2} e^{jn\omega_0 t} + \frac{a_n + jb_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} \right)$$

令

$$F_n(jn\omega_0) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

并考虑到

$$a_n = a_{-n}, \quad b_n = -b_{-n}$$



得

$$F_n(-jn\omega_0) = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

所以有

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [F_n(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t} + F_n(-jn\omega_0)e^{-jn\omega_0 t}]$$

令  $F_n(0) = a_0$  并考虑到

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(-jn\omega_0)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} F_n(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t} \quad (3-7)$$

得到

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t}$$

可见,周期信号  $f(t)$  可以表示为若干个复指数信号的组合。其中  $F_n(jn\omega_0)$  为复指数信号的系数。式(3-7)称为指数型傅里叶级数。因为

$$F_n(jn\omega_0) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad (3-8)$$

所以  $F_n(jn\omega_0)$  一般为复函数,所以称之为傅里叶级数的复系数(复振幅),通常将  $F_n(jn\omega_0)$  简写为  $F_n$ 。将  $a_n, b_n$  的定义代入式(3-8)得到

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad n \in \text{整数} \quad (3-9)$$

我们就可以利用式(3-9)计算一个周期信号的复系数,从而将其表示为指数型傅里叶级数。

其实,复系数  $F_n$  与傅里叶级数的其他系数有密切关系,即

$$F_0 = a_0 = A_0, \quad F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = |F_n| e^{j\varphi_n} \quad (3-10)$$

$$\left. \begin{aligned} |F_n| &= \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \\ \varphi_n &= \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

可见,  $F_n$  也应该是  $n\omega_0$  的函数,且  $|F_n|$  为  $n$  的偶函数,  $\varphi_n$  为  $n$  的奇函数。将  $n\omega_0$  用  $\omega$  代替,也可以得到  $|F_n|$  与  $\omega$  的关系和  $\varphi_n$  与  $\omega$  的关系,以  $\omega$  为横轴,  $|F_n|$  与  $\varphi_n$  为纵轴,画出  $|F_n|$  与  $\omega$  的谱线,称为(复数)幅度谱。画出  $\varphi_n$  与  $\omega$  的谱线,称为(复数)相位谱。二者共同组成信号的复数频谱(复频谱)。值得注意的是,  $F_n$  中的  $n$  可取负整数,故  $\omega$  有正有负,即复频谱中不仅包括正频率项,而且含有负频率项,所以经常称复频谱为双边谱,如图 3-4 所示;而称图 3-1 所示的频谱为单边谱。

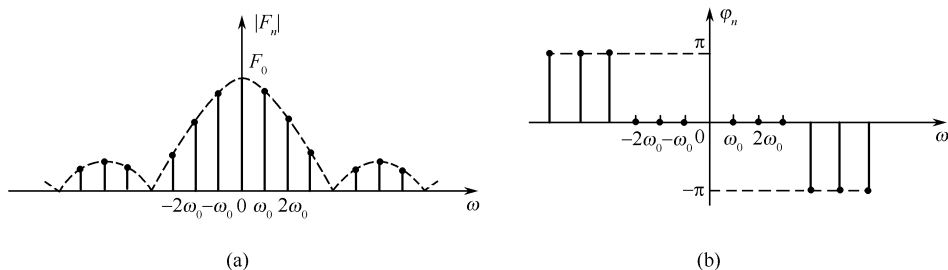


图 3-4 周期信号的双边谱

对同一个周期信号,它的频谱只能有一个,我们既可以用三角型傅里叶级数展开,从而画出它的单边谱,又可以用指数型傅里叶级数展开,从而画出它的双边谱。那么双边谱和单边谱如何统一呢?其实这两种频谱表示方法实质上是一样的,其不同之处仅是单边谱中的每条谱线代表一个分量的振幅,而双边谱中每个分量的幅度一分为二,在正、负频率处各为一半,即

$$|F_n| + |F_{-n}| = A_n \quad \text{或} \quad |F_n| = |F_{-n}| = \frac{1}{2}A_n \quad (3-12)$$

所以,只有两正、负频率上对应的两条谱线相加才代表一个频率分量的振幅;而相位谱是一致的,只要将单边谱中的相位谱进行奇对称,画成双边相位谱即可。

在双边谱中出现的负频率其实没有任何物理含义,完全是由于数学运算的结果,只有将负频率项与相应的正频率项成对地合并起来,才是实际的频谱。

**【例 3-3】** 将例 3-1 中的周期矩形脉冲信号展开为指数型傅里叶级数,并画出其复频谱。

**解:**根据  $F_n$  的定义有

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

所以

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{E\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

相应的复频谱如图 3-5 所示。

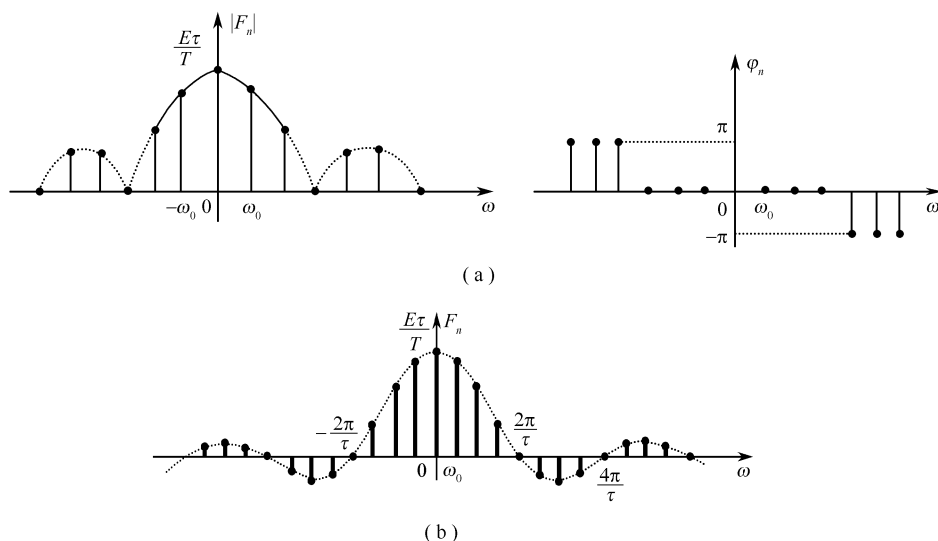


图 3-5 例 3-3 矩形脉冲信号的双边谱

将周期信号的幅度谱和相位谱分开画,如图 3-5(a)所示。只有当  $F_n$  为实数时,可以将频谱图画在一张图中,如图 3-5(b)所示。一般情况下,  $F_n$  为复函数,幅度谱和相位谱就不能画在一张图中,必须分为幅度谱与相位谱两张图。

**【例 3-4】** 求信号  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  的频谱。

解: 因为

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

所以

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$

相应的信号波形及其频谱图如图 3-6 所示。

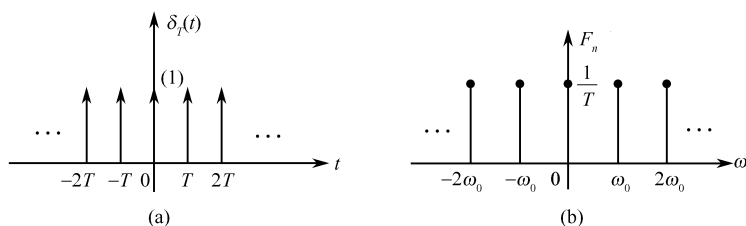


图 3-6 例 3-4 的图

【例 3-5】 已知连续周期信号  $f(t) = 2 + 4\cos \frac{\pi}{4}t + 8\cos\left(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$ , 将其表示成复指数信号形式, 并画出其频谱。

解: 从  $f(t)$  的表达式可知, 它是  $f(t)$  的三角型傅里叶级数形式, 故  $f(t)$  中含直流分量、基波分量、三次谐波分量, 即

$$\omega_0 = \pi/4, A_0 = 2; \quad A_1 = 4, \varphi_1 = 0^\circ; \quad A_3 = 8, \varphi_3 = \pi/2$$

从傅里叶系数与复振幅之间的关系, 或单边谱与双边谱之间的关系可得

$$F_0 = 2; \quad F_1 = A_1/2 = 2, F_{-1} = 2; \quad F_3 = 4e^{j\pi/2}, F_{-3} = 4e^{-j\pi/2}$$

所以将  $f(t)$  表示成指数型傅里叶级数为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= 2 + 2e^{j\omega_0 t} + 2e^{-j\omega_0 t} + 4e^{j\pi/2} e^{j3\omega_0 t} + 4e^{-j\pi/2} e^{-j3\omega_0 t} \\ &= 2 + 2e^{j\pi/4 t} + 2e^{-j\pi/4 t} + 4e^{j(\frac{3}{4}\pi t + \pi/2)} + 4e^{-j(\frac{3}{4}\pi t + \pi/2)} \end{aligned}$$

画出相应的频谱如图 3-7 所示。

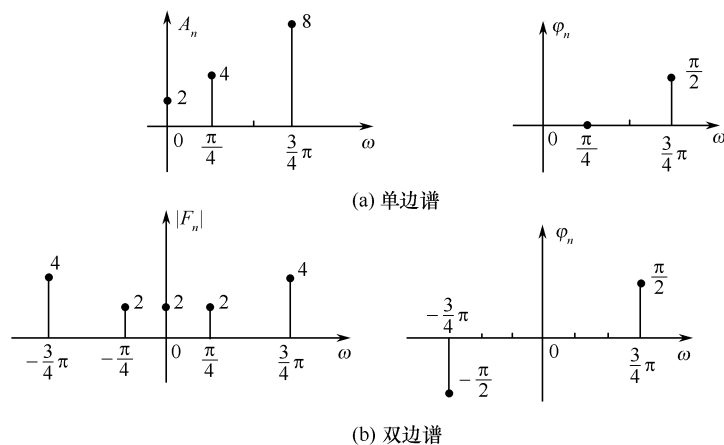


图 3-7 例 3-5 的单边谱和双边谱

### 3.1.3 周期信号频谱的特点

在实际应用中,周期矩形脉冲信号具有很重要的地位。下面就以周期矩形脉冲信号为例,揭示周期信号的频谱特点。

由前面的讨论知道,周期矩形脉冲信号的波形及其频谱如图 3-8 所示。

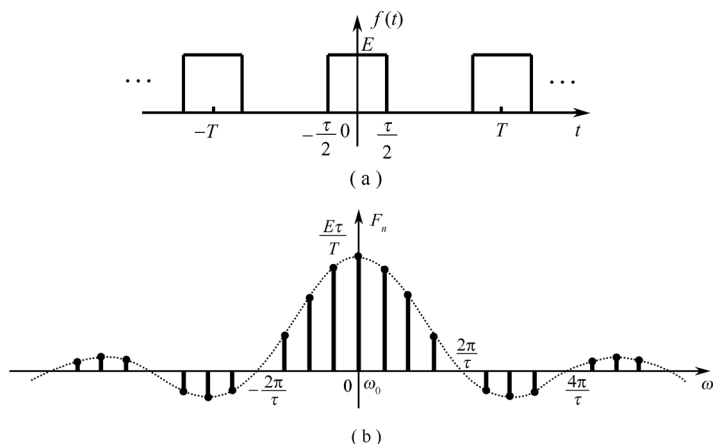


图 3-8 周期矩形脉冲信号及其频谱

通过对周期矩形脉冲信号的频谱分析,可以归纳出有关周期信号频谱结构的一般特点如下。

(1) 周期信号的频谱都是离散谱,谱线间隔为  $\omega_0$ ,谱线(谐波分量)只存在于基波频率  $\omega_0$  的整数倍上。

(2) 理论上周期信号的谐波分量是无限多的。在整个频率范围内高次谐波幅度虽然时有起伏,但总的趋势是按照一定规律递减的。这表明,信号能量主要集中在低频范围内。对周期矩形脉冲而言,其能量主要集中在第一个过零点以内。而且谐波分量的振幅  $A_n$  随着  $T$  增大而减小。

(3) 信号的频带宽度。基于上述理由,我们把从零频开始的能量主要集中的频率范围称为信号的有效频带宽度,简称带宽。如周期矩形脉冲信号的带宽为

$$B = 2\pi/\tau (\text{rad/s}) \quad \text{或} \quad \Delta f = 1/\tau (\text{Hz}) \quad (3-13)$$

(4) 信号的时间特性与频率特性之间的关系。从式(3-13)可知,时域中脉冲持续时间越短,在频域中信号占有的频带越宽。

(5) 谱线密度与周期  $T$  的关系。因为谱线间隔  $\omega_0 = 2\pi/T$ ,所以周期越大,谱线间隔越小,谱线越密集。当  $T$  趋近于无穷大,即  $T \rightarrow \infty$  时,周期信号就变成非周期信号,离散谱将趋近于连续谱。

## 3.2 非周期信号的傅里叶变换分析

### 3.2.1 从傅里叶级数到傅里叶变换

周期信号与非周期信号的关系,从数学上看,非周期信号就是令周期信号的周期趋于无限大时的极限情况。各种形式的单脉冲信号就是常见的非周期信号。

上一节中我们就发现,周期矩形脉冲信号的谱线密度与周期  $T$  相关。当  $T$  无限增大时,谱线间隔与谱线高度均将趋于无穷小,周期矩形脉冲信号就变成了单一矩形脉冲。也就是说非周期信号的频谱是由无限多个幅度为无穷小的连续频率分量所组成的。虽然各频率分量的绝对幅度为无穷小,但其相对大小仍然是有差别的。为此,有下面频谱密度函数的定义。

$$\text{令} \quad F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot F_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F_n}{1/T} \quad (3-14)$$

当  $T \rightarrow \infty$  时,  $n\omega_0 \rightarrow \omega$ , 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F_n}{1/T} = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{所以有} \quad F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-15)$$

$F(j\omega)$  称为频谱密度函数,简称频谱函数。从式(3-14)的量纲可知,其意义为单位频率上的幅度,揭示了非周期信号连续频谱的规律。

与周期信号的傅里叶级数(这里  $f_T(t)$  指周期为  $T$  的周期信号)

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

相对应,当  $T \rightarrow \infty$  时,  $f(t)$  将成为非周期信号,即有

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T \cdot F_n(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \cdot \frac{1}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T \cdot F_n(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \cdot \omega_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (3-16)$$

上式表明,非周期信号  $f(t)$  可以分解为无限多个虚指数函数分量  $e^{j\omega t}$  之和,指数分量的谱系数为  $\frac{F(j\omega)}{2\pi} d\omega$ , 是一无穷小量,这些分量的频率范围为  $-\infty \sim \infty$ , 占据整个频率域。

重新写出式(3-15)和式(3-16)

$$\left. \begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

则称式(3-17)是一对变换式,前者称为傅里叶(正)变换,简称傅氏变换,后者称为傅里叶逆变换,简称傅氏逆变换。傅氏变换是将非周期信号的时间函数变换为相应的频谱函数;傅氏逆变换是将信号的频谱函数变换为相应的时间函数。这种相互变换的关系给出了信号的时域特性和频域特性之间的一一对应关系。

为了书写方便,常采用如下符号:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)], \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] \quad (3-18)$$

$$\text{即} \quad f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) \quad (3-19)$$

需要指出的是,傅氏变换和逆变换都是无穷区间的广义积分,因此傅里叶变换存在与否还

需要进行数学证明。本课程不去研究这一复杂的数学理论证明,只介绍傅氏变换存在的充分条件。

如果 $f(t)$ 满足绝对可积条件,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \text{有限值} \quad (3-20)$$

则其傅氏变换 $F(j\omega)$ 存在。其实,所有能量信号都能满足上述绝对可积条件。但这个条件只是充分条件而不是必要条件。一些不满足绝对可积条件的函数也可以有傅氏变换。除此之外,还有一些重要函数,例如冲激信号、阶跃信号、周期信号等,当引入 $\delta$ 信号之后,也存在相应的傅里叶变换。

### 3.2.2 频谱函数 $F(j\omega)$ 的特性

由式(3-17)可知, $F(j\omega)$ 一般为 $\omega$ 的复函数,若信号 $f(t)$ 是实信号,其频谱函数可表示为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \\ &= R(\omega) + jX(\omega) \\ &= |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned} \quad (3-21)$$

从式(3-21)可以得到如下结论:

(1) 实部 $R(\omega)$ 是 $\omega$ 的偶函数,虚部 $X(\omega)$ 是 $\omega$ 的奇函数。

(2) 模量 $|F(j\omega)|$ 代表非周期信号 $f(t)$ 的各频率分量的相对大小,是 $\omega$ 的偶函数,幅角 $\varphi(\omega)$ 则代表相应各频率分量的相位,是 $\omega$ 的奇函数。

(3) 以 $\omega$ 为横坐标轴, $|F(j\omega)|$ 为纵坐标轴,将 $|F(j\omega)|$ 与 $\omega$ 的关系画成图形,就称为信号的幅度谱;类似地,将 $\varphi(\omega)$ 与 $\omega$ 的关系画成图形,就称为信号的相位谱。幅度谱和相位谱就组成一个非周期信号的频谱,反映了非周期信号的时间特性与频率特性之间的关系,也叫信号的频谱分析。

(4) 若信号 $f(t)$ 为偶函数,则 $F(j\omega) = R(\omega)$ ;若 $f(t)$ 为奇函数,则 $F(j\omega) = jX(\omega)$ 。

若信号 $f(t)$ 是虚信号,其频谱函数的奇偶性与上述特性有所不同,具体请参照表3-1。

**【例3-6】** 求图3-9(a)所示矩形脉冲信号的频谱。

**解:**图3-9(a)所示矩形脉冲信号 $f(t)$ 的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} E, & |t| < \tau/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其傅氏变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j\omega t} dt$$

$$= E\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

可见,其振幅谱为

$$|F(j\omega)| = E\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$$

相位谱为

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & F(j\omega) > 0 \\ \pi \text{ 或 } -\pi, & F(j\omega) < 0 \end{cases}$$

如图3-9(b)和(c)所示。

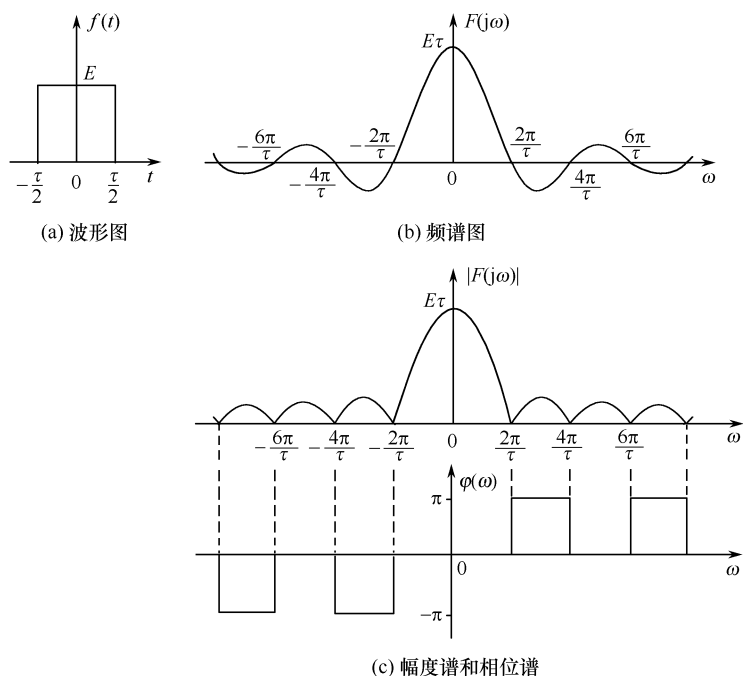


图 3-9 矩形脉冲的波形和频谱

由例 3-6 可知,若傅氏变换  $F(j\omega)$  是实函数,频谱可画在一张图上,如图 3-9(b) 所示。若  $F(j\omega)$  是复函数,频谱只能画成两张图,即分别画出振幅谱和相位谱,如图 3-9(c) 所示。

### 3.2.3 典型非周期信号的傅里叶变换

#### 1. 矩形脉冲信号(门信号) $g_\tau(t)$

由例 3-6 可知,幅度  $E=1$  的矩形脉冲信号  $g_\tau(t)$  的傅里叶变换为

$$g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3-22)$$

相应的信号波形及频谱如图 3-10 所示。

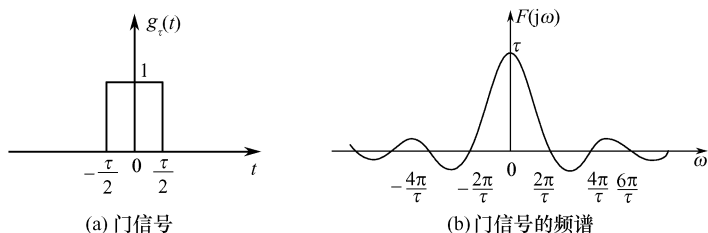


图 3-10 门信号的波形及频谱

#### 2. 单边指数信号 $e^{-at}U(t)$ ( $a>0$ )

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} U(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a + j\omega}$$

即

$$\left. \begin{aligned} e^{-at}U(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{a+j\omega} \\ |F(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \\ \varphi(\omega) &= -\arctan \frac{\omega}{a} \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

式中,  $|F(j\omega)|$  和  $\varphi(\omega)$  分别为单边指数信号的幅度谱和相位谱。相应的信号波形及频谱如图 3-11 所示。

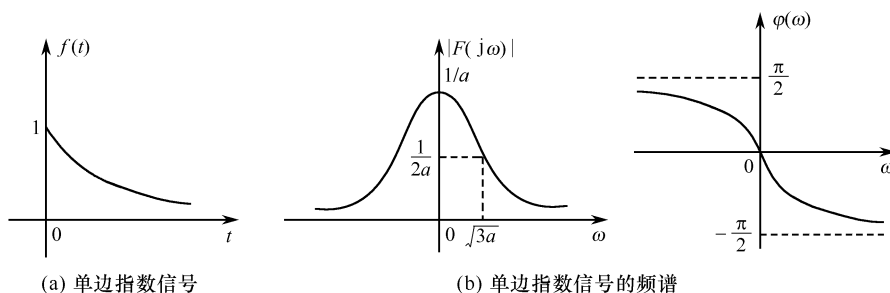


图 3-11 单边指数信号的波形及频谱

### 3. 双边指数信号 $e^{-a|t|}$ ( $a>0$ )

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \\ e^{-a|t|} &\longleftrightarrow \frac{2a}{\omega^2+a^2} \\ F(\omega) &= \frac{2a}{\omega^2+a^2} \\ \varphi(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (3-24)$$

即

相应的信号波形及频谱如图 3-12 所示。

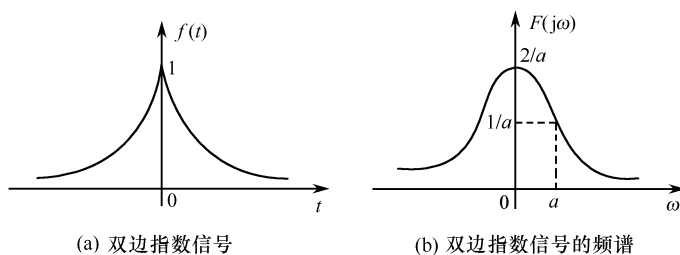


图 3-12 双边指数信号的波形及频谱

### 4. 符号函数 $\text{sgn}(t)$

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(t) &= \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} U(t) - e^{at} U(-t)] \\ F(j\omega) &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt \right] = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} \right) = \frac{2}{j\omega} \\ \left. \begin{aligned} \operatorname{sgn}(t) &\longleftrightarrow \frac{2}{j\omega} \\ F(\omega) &= \frac{2}{|\omega|} \\ \varphi(\omega) &= \begin{cases} \pi/2, & \omega < 0 \\ -\pi/2, & \omega > 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3-25) \end{aligned}$$

其波形和频谱如图 3-13 所示。

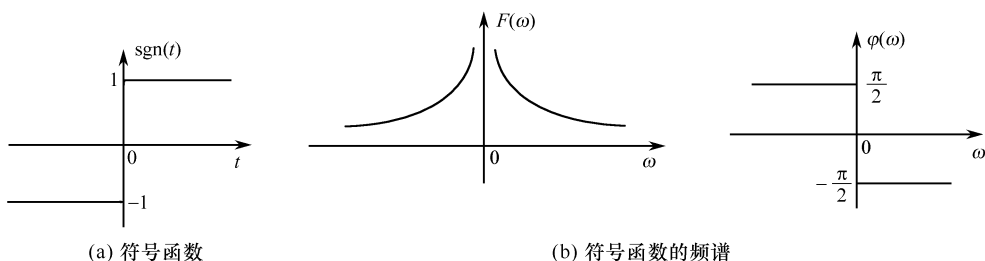


图 3-13 符号函数的波形和频谱

## 5. 冲激信号和冲激偶

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

由于

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{d}{dt} \delta(t) = \delta'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

可得  $\delta'(t)$  的频谱函数

$$F(j\omega) = j\omega$$

即

$$\left. \begin{aligned} \delta'(t) &\longleftrightarrow j\omega \\ \delta^{(n)}(t) &\longleftrightarrow (j\omega)^n \end{aligned} \right\}$$

同理可得

(3-26)

## 6. 单位直流信号

如图 3-14(a) 所示, 直流信号可看成双边指数信号  $a \rightarrow 0$  的极限情况, 可根据双边指数信号的频谱取极限的情况来求其频谱。

$$1 = \lim_{a \rightarrow 0} f(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|}$$

$$F(j\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0 \\ \infty, & \omega = 0 \end{cases}$$

$F(j\omega)$  显然是一个冲激函数, 其强度为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2} d\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} d\omega = 2\pi$$

即

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (3-27)$$

相应的信号波形及频谱如图 3-14 所示。

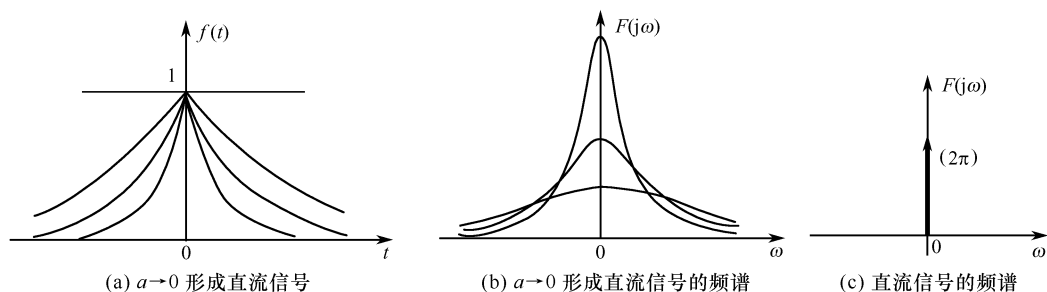


图 3-14 直流信号的波形及频谱

## 7. 阶跃信号 $U(t)$

把阶跃信号做偶分量、奇分量分解,有

$$U(t) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

$$F(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

即

$$U(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3-28)$$

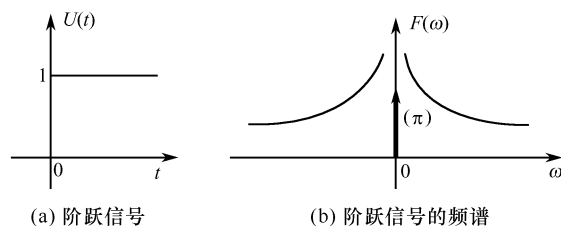


图 3-15 阶跃信号的波形及频谱

信号波形和频谱如图 3-15 所示。

常用信号的傅里叶变换及其频谱请参看附录 D。

## 3.3 傅里叶变换的性质

在 3.2 节中我们研究了信号的频谱函数,并通过傅氏变换对建立了信号的时域和频域之间的对应关系。在信号分析时,经常还需要对时域信号进行某种运算。那么这种运算之后的时域信号在频域发生了何种变化,与原信号的频谱又有何关系;反过来,若在频域发生了某种变化,在时域又有何变动。研究这些问题当然可以使用式(3-17)求积分得到,但这种方法计算过程比较复杂。使用下面所介绍的傅里叶变换的性质,就方便得多,而且物理概念也很清楚。

### 3.3.1 线性特性

若

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$$

则

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega) \quad (3-29)$$

其中,  $a_1$  和  $a_2$  为任意常数。

证明: 因为  $\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-j\omega t} dt$

$$\begin{aligned}
 &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)
 \end{aligned}$$

所以

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$$

显然,傅里叶变换满足齐次性和可加性。其实,在3.2节中讨论阶跃信号的频谱函数时已经很自然地应用了线性性质。

【例3-7】 求图3-16(a)所示信号的频谱  $F(j\omega)$ 。

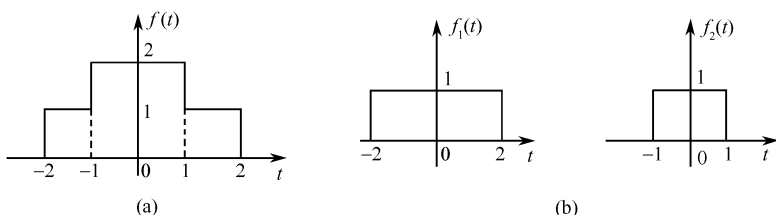


图3-16 例3-7的图

解:因为

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$$g_{\tau}(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

故

$$f_1(t) \longleftrightarrow 4\text{Sa}(2\omega), \quad f_2(t) \longleftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)$$

所以

$$F(j\omega) \longleftrightarrow 4\text{Sa}(2\omega) + 2\text{Sa}(\omega)$$

### 3.3.2 对称特性

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (3-30)$$

证明:根据傅氏逆变换定义

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

则有

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (1)$$

将式①中的变量  $t$  与  $\omega$  互换,结果不变,即

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt$$

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt$$

所以由傅氏变换的定义知,时域信号  $F(jt)$  的傅氏变换为  $2\pi f(-\omega)$ ,即

$$F(jt) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

该性质说明,若偶函数  $f(t)$  的频谱函数为  $F(j\omega)$ ,另一与  $F(j\omega)$  形式完全相同的时域信号  $F(jt)$  的频谱函数就与信号  $f(t)$  的形式相同,只相差系数  $2\pi$ 。图3-17所示就是一个例子。

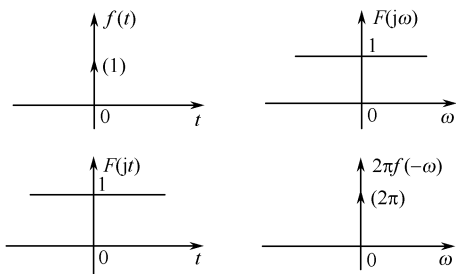


图3-17 冲激信号的傅氏变换和对称性

【例 3-8】 求信号  $\text{Sa}(\omega_0 t)$  的频谱函数。

解:由前面典型信号的傅里叶变换知

$$g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

则 
$$\tau \text{Sa}\left(\frac{\tau}{2}t\right) \longleftrightarrow 2\pi g_\tau(\omega)$$

令 
$$\frac{\tau}{2} = \omega_0$$

所以 
$$\text{Sa}(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0} g_{2\omega_0}(\omega) \quad (3-31)$$

相应的频谱图如图 3-18(b) 所示。

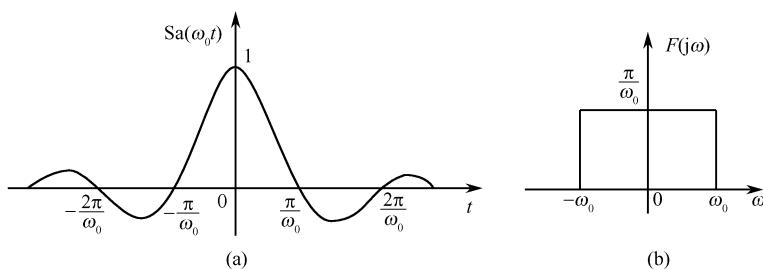


图 3-18 例 3-8 的图

### 3.3.3 时移特性

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow F(j\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (3-32)$$

证明:因为

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

令  $x = t - t_0$ , 则

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

所以

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow F(j\omega) e^{-j\omega t_0}$$

这个性质说明,若  $F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ , 则

$$f(t - t_0) \longleftrightarrow |F(j\omega)| e^{j[\varphi(\omega) - \omega t_0]}$$

即若时域信号  $f(t)$  沿时间轴右移  $t_0$ , 在频域中频谱的振幅谱不变, 相位谱产生附加相移  $-\omega t_0$ 。

同理可得

$$f(t + t_0) \longleftrightarrow F(j\omega) e^{j\omega t_0} \quad (3-33)$$

【例 3-9】 求  $g_\tau\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$  的相位谱。

解:由门信号  $g_\tau(t)$  的频谱可知它的相位谱如图 3-19(c) 所示, 根据时移特性知

$g_\tau\left(t + \frac{\tau}{2}\right)$  的相位谱如图 3-19(d) 所示。

图 3-19 中只画了  $\omega > 0$  的频谱。读者可以自行补充完整。

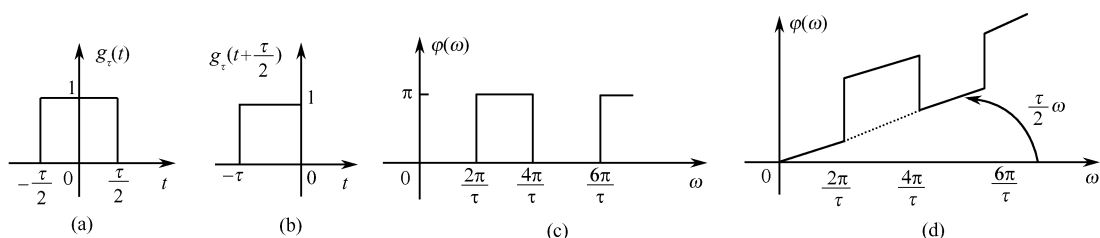


图 3-19 例 3-9 的图

【例 3-10】 求图 3-20(a) 所示信号的频谱。

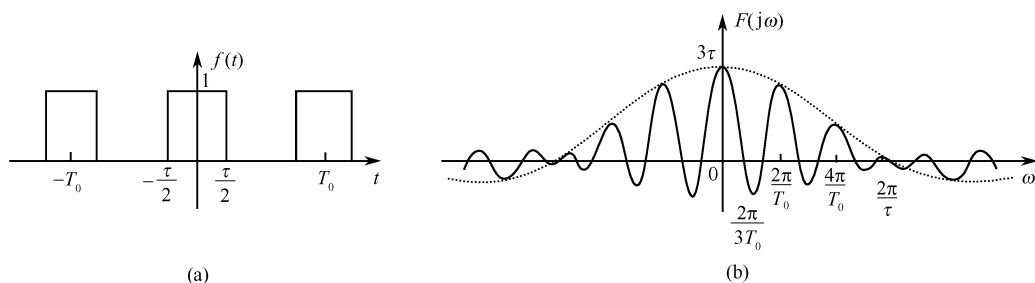


图 3-20 例 3-10 的图

解: 因为

$$f(t) = g_\tau(t + T_0) + g_\tau(t) + g_\tau(t - T_0)$$

所以

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{j\omega T_0} + \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) + \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega T_0} \\ &= \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) (1 + e^{j\omega T_0} + e^{-j\omega T_0}) \\ &= \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) (1 + 2\cos\omega T_0) \end{aligned}$$

相应的频谱如图 3-20(b) 所示。当脉冲的数目增加时, 信号的能量将向  $\omega = \frac{2m\pi}{T_0}$  处集中, 在该频率处幅度增大, 而在其他频率处幅度减小, 甚至等于零。当脉冲个数无限增多时 (这时就成为周期信号), 则除  $\omega = \frac{2m\pi}{T_0}$  的各谱线外, 其余频率分量均等于零, 从而变成离散谱。这是从非周期信号变为周期信号时频谱函数变化的例子。

### 3.3.4 频移特性

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$f(t) e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow F[j(\omega - \omega_0)] \quad (3-34)$$

$$\text{证明: 因为 } \mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

所以

$$\mathcal{F}[f(t) e^{j\omega_0 t}] = F[j(\omega - \omega_0)]$$

同理

$$\mathcal{F}[f(t) e^{-j\omega_0 t}] = F[j(\omega + \omega_0)] \quad (3-35)$$

其中  $\omega_0$  为实常数。

该特性说明,若时间信号  $f(t)$  乘以因子  $e^{j\omega_0 t}$ ,则在频域中相应频谱函数  $F(j\omega)$  的规律不变,仅仅沿频率轴向右搬移  $\omega_0$ ;反之,若信号的频谱函数  $F(j\omega)$  沿  $\omega$  轴右移  $\omega_0$ ,反映在时域中应为  $f(t)$  乘以因子  $e^{j\omega_0 t}$ 。所以,频移特性也叫频谱搬移特性。由频移特性容易得到

$$e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (3-36)$$

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (3-37)$$

结合欧拉公式和线性特性得

$$\left. \begin{aligned} \cos\omega_0 t &\longleftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ \sin\omega_0 t &\longleftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned} \right\} \quad (3-38)$$

【例 3-11】 已知矩形调幅信号  $f(t) = g_\tau(t) \cos(\omega_0 t)$ , 试求其频谱函数。

解: 因为

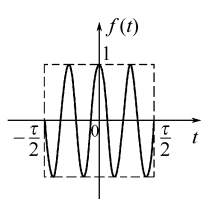
$$f(t) = \frac{1}{2}g_\tau(t)(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

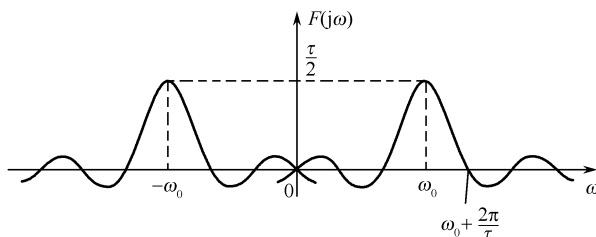
由频移特性得

$$f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\tau \text{Sa}\left[\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right)\tau\right] + \frac{1}{2}\tau \text{Sa}\left[\left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right)\tau\right]$$

其波形及频谱如图 3-21 所示。可见,调幅信号的频谱等于将  $g_\tau(t)$  的频谱一分为二,各向左、右移载频  $\omega_0$ ,进行了频谱搬移。



(a) 矩形调幅信号的波形



(b) 矩形调幅信号的频谱

图 3-21 例 3-11 的图

### 3.3.5 时频展缩特性

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad (3-39)$$

其中  $a$  为非零实常数。

证明: 因为

$$\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

令  $x = at$ , 当  $a > 0$  时

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx = \frac{1}{a} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时 } \mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx = \frac{-1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx = \frac{-1}{a} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

综合上述两种情况,便可得到时频展缩特性表达式为

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$$

该特性表明,信号在时域中以  $1/a$  的比例压缩相应于在频域中频谱展宽  $a$  倍而幅度压缩为原来的  $1/a$ ,即信号脉宽与频宽成反比关系。如果要求信号持续时间缩短,则在频域中必须付出展宽频带的代价,对通信系统的要求也随之提高。

如果对时间信号  $f(t)$  既有平移又有展缩,即  $f(t)$  变为  $f(at+b)$  时,它的频谱函数为

$$f(at+b) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} e^{j\omega(\frac{b}{a})} F\left(j \frac{\omega}{a}\right) \quad (3-40)$$

显然,时移特性和时频展缩特性都是上式的特殊情况。

如果  $a = -1, b = 0$ , 则得

$$f(-t) \longleftrightarrow F(-j\omega) = F^*(j\omega) \quad (3-41)$$

上式中,等式只在  $f(t)$  为实信号时成立。

【例 3-12】 如已知图 3-22(a) 的函数是宽度为 2 的门信号,即  $f_1(t) = g_2(t)$ , 其傅里叶变换  $F_1(j\omega) = 2\text{Sa}(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}$ , 求图 3-22(b) 和 (c) 中函数  $f_2(t)$  和  $f_3(t)$  的傅里叶变换。

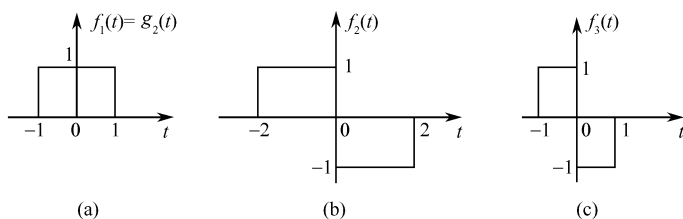


图 3-22 例 3-12 的图

解:(1) 图 3-22(b) 中函数  $f_2(t)$  可表示为时移信号  $f_1(t+1)$  与  $f_1(t-1)$  之差,即

$$f_2(t) = f_1(t+1) - f_1(t-1)$$

由傅里叶变换的线性和时移特性可得  $f_2(t)$  的傅里叶变换

$$F_2(j\omega) = F_1(j\omega)e^{j\omega} - F_1(j\omega)e^{-j\omega} = \frac{2\sin\omega}{\omega}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = j4 \frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$$

(2) 图 3-22(c) 中的函数  $f_3(t)$  是  $f_2(t)$  的压缩,可写为

$$f_3(t) = f_2(2t)$$

由时频展缩特性可得

$$F_3(j\omega) = \frac{1}{2} F_2\left(j \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} j4 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega/2} = j4 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega}$$

### 3.3.6 时域微分特性

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$f'(t) \longleftrightarrow j\omega F(j\omega)$$

(3-42)

证明:因为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边对  $t$  求导,得

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\omega F(j\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

所以

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\omega F(j\omega)$$

对于时域  $n$  阶微分, 可推广得到

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega) \quad (3-43)$$

该特性说明, 在时域中对信号  $f(t)$  取  $n$  阶导数, 相应于频域中的频谱函数  $F(j\omega)$  乘以  $(j\omega)^n$ 。

【例 3-13】 已知图 3-23(a) 所示信号的频谱函数为  $F_1(j\omega) = \tau^2 \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ , 求图 3-23(b) 所示信号的频谱函数。

解: 因为  $f_1(t) \longleftrightarrow \tau^2 \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

而  $f_2(t) = f_1'(t)$

根据时域微分性质可得

$$f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega) = j\omega \cdot \tau^2 \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

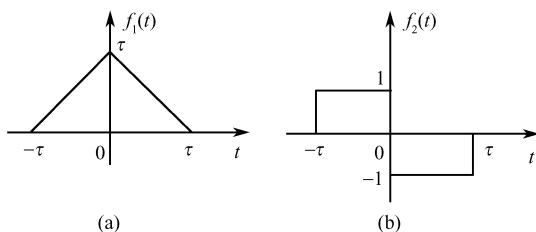


图 3-23 例 3-13 的图

### 3.3.7 频域微分特性

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$(-jt)f(t) \longleftrightarrow \frac{d}{d\omega} F(j\omega) \quad (3-44)$$

证明: 因为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

上式两边对  $\omega$  求导数, 得

$$\frac{dF(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)f(t) e^{-j\omega t} dt$$

根据傅里叶变换的定义可得

$$(-jt)f(t) \longleftrightarrow \frac{dF(j\omega)}{d\omega}$$

类似推广可得

$$(-jt)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{d^n}{d\omega^n} F(j\omega) \quad (3-45)$$

【例 3-14】 求  $f(t) = t$  和  $f(t) = tU(t)$  的频谱。

解: 因为

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

则

$$t \longleftrightarrow 2\pi j\delta'(\omega) \quad (3-46)$$

又因

$$U(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

则

$$tU(t) \longleftrightarrow j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2} \quad (3-47)$$

### 3.3.8 时域积分特性

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \quad (3-48)$$



特别地,若 $\frac{F(j\omega)}{\omega}$ 在 $\omega=0$ 处是有界的(或满足 $F(0)=0$ ,即信号的直流分量为零),则

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} \quad (3-49)$$

证明:因为

$$y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

$$Y(j\omega) = \mathcal{F}[y(t)]$$

将 $y(t)$ 取导数,得到

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t)$$

由微分特性可知

$$j\omega Y(j\omega) = F(j\omega)$$

若 $\frac{F(j\omega)}{\omega}$ 在 $\omega=0$ 处是有界的,或者满足 $F(0)=0$ 条件,此时 $Y(j\omega)$ 中不包含冲激信号 $\delta(\omega)$ ,这样上式可以表示为

$$Y(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

即

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

如果不满足上述条件, $Y(j\omega)$ 中必定包含冲激信号 $\delta(\omega)$ 。在这种情况下,式(3-49)不再成立。

由于 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = f(t) * U(t)$ ,所以利用3.3.9节的时域卷积定理,很容易证明式(3-49)应改写成一般形式,即

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

**【例 3-15】** 求 3-24(a) 所示信号 $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ 。

**解:**因为 $f'(t) = g_1(t)$ ,如图 3-24(b)所示。有

$$f'(t) \longleftrightarrow \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) = F_1(j\omega)$$

又因 $F_1(0) = 1 \neq 0$ ,所以

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} F_1(j\omega) + \pi F_1(0)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) + \pi\delta(\omega)$$

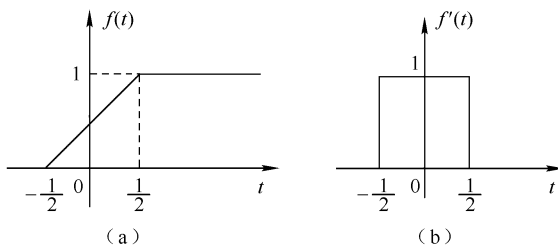


图 3-24 例 3-15 的图

### 3.3.9 卷积特性(卷积定理)

卷积定理在信号与系统分析中占有重要地位,是应用最广的性质之一,在以后章节的频域分析当中,我们将会认识到这一点。

## 1. 时域卷积定理

若

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$$

则

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) \quad (3-50)$$

证明:由卷积的定义有

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

因此

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(j\omega) e^{-j\omega \tau} d\tau \\ &= F_2(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \end{aligned}$$

所以

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(j\omega) F_2(j\omega)$$

式(3-50)称为时域卷积定理,它说明两个时间信号卷积的频谱等于各个时间信号频谱的乘积,即在时域中两信号的卷积等效于在频域中频谱相乘。即把时域的卷积运算简化为频域的代数运算,这也是频域分析的目的所在。

【例 3-16】 求图 3-25 所示信号  $f(t)$  的频谱  $F(j\omega)$ 。

解:因为

$$f(t) = g_{\tau}(t) * g_{\tau}(t)$$

$$g_{\tau}(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)$$

所以

$$F(j\omega) = \left[ \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \right]^2$$

与例 3-13 的结果相同。

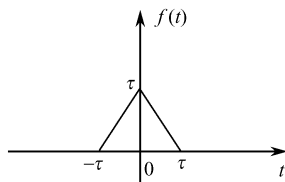


图 3-25 例 3-16 的图

【例 3-17】 求图 3-26 所示信号  $f(t)$  的频谱  $F(j\omega)$ 。

解:因为  $f(t) = g_2(t) * \delta(t+2) + g_2(t) * \delta(t-2)$

所以

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= 2\text{Sa}(\omega) e^{j2\omega} + 2\text{Sa}(\omega) e^{-j2\omega} \\ &= 4\cos 2\omega \cdot \text{Sa}(\omega) \end{aligned}$$

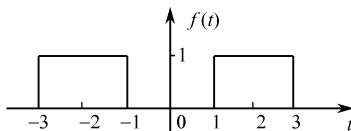


图 3-26 例 3-17 的图

## 2. 频域卷积定理

若

$$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega), \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(j\omega)$$

则

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} [F_1(j\omega) * F_2(j\omega)] \quad (3-51)$$

证明:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) \cdot f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda \right] f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\lambda) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-j(\omega - \lambda)t} dt \right] d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\lambda) F_2[j(\omega - \lambda)] d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi} [F_1(j\omega) * F_2(j\omega)]
\end{aligned}$$

式(3-51)称为频域卷积定理,它说明两时间信号频谱的卷积等效于两信号的时域相乘。显然时域与频域卷积定理是对称的,这是由傅里叶变换的对称性所决定的。

【例3-18】求图3-27所示信号的频谱 $F(j\omega)$ 。其中 $f(t) = (1 + \cos\pi t)g_2(t)$ ,式中 $g_2(t)$ 是宽度为2的门信号。

解:因为  $g_2(t) \longleftrightarrow 2\text{Sa}(\omega)$ ,  $1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$   
 $\cos\pi t \longleftrightarrow \pi[\delta(\omega - \pi) + \delta(\omega + \pi)]$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } F(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \{ 2\text{Sa}(\omega) * [2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - \pi) + \pi\delta(\omega + \pi)] \} \\
&= 2\text{Sa}(\omega) + \text{Sa}(\omega - \pi) + \text{Sa}(\omega + \pi)
\end{aligned}$$

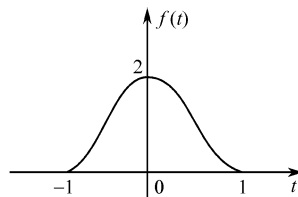


图 3-27 例 3-18 的图

【例3-19】求图3-28所示信号 $f(t)$ 的频谱 $F(j\omega)$ ,其中

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) = f_1(t) \cdot \cos(10\pi t)$$

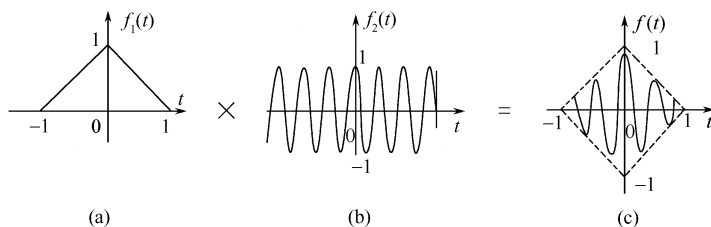


图 3-28 例 3-19 的信号波形

解:由例3-16可知

$$f_1(t) = g_1(t) * g_1(t), \quad g_1(t) \longleftrightarrow \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{所以 } F(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \text{Sa}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) * [\pi\delta(\omega - 10\pi) + \pi\delta(\omega + 10\pi)] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega - 10\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega + 10\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

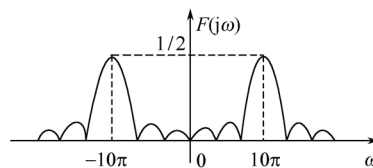


图 3-29 例 3-19 $f(t)$ 的频谱

### 3.3.10 能量定理(帕斯瓦尔定理)

若

$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (3-52)$$

此特性表明,能量有限的非周期信号,能量既可按单位时间内的能量 $|f(t)|^2$ 在整个时间内积分算出,也可按单位频带内的能量 $\frac{|F(j\omega)|^2}{2\pi}$ 在整个频带范围积分算出。

证明:对能量信号 $0 < E < \infty$ ,有

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]^* dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(j\omega) F(j\omega) d\omega
 \end{aligned}$$

式中, \* 表示取复数的共轭。

则 
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

【例 3-20】 已知  $f(t) = 10e^{-t}U(t)V$ , 求  $f(t)$  所包含的能量。

解: 因为 
$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} (10e^{-t})^2 dt = 100 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = 50J$$

又因

$$\begin{aligned}
 f(t) &\longleftrightarrow F(j\omega) = \frac{10}{1+j\omega} \\
 |F(j\omega)| &= F(\omega) = \frac{10}{\sqrt{1+\omega^2}}
 \end{aligned}$$

所以 
$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{100}{1+\omega^2} d\omega = \frac{50}{\pi} [\arctan \omega] \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{50}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] = 50J$$

【例 3-21】 计算积分  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2(at) dt$ 。

解: 因为 
$$\text{Sa}(at) \longleftrightarrow F(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{a}, & |\omega| < a \\ 0, & |\omega| > a \end{cases}$$

所以 
$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2(at) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 d\omega = \frac{\pi}{a}$$

最后将傅里叶变换的性质归纳如表 3-1 所示, 作为本节的小结。

表 3-1 傅里叶变换的性质

名 称	时域 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$		频域
定 义	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$		$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$ $F(j\omega) = F(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$
线性特性	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$		$a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega)$
奇偶特性	$f(t)$ 为实函数		$F(\omega) = F(-\omega), \quad \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$ $R(\omega) = R(-\omega), \quad X(\omega) = -X(-\omega)$ $F(-j\omega) = F^*(j\omega)$
		$f(t) = f(-t)$ $f(t) = -f(-t)$	$F(j\omega) = R(\omega), \quad X(\omega) = 0$ $F(j\omega) = jX(\omega), \quad R(\omega) = 0$
	$f(t)$ 为虚函数		$F(\omega) = F(-\omega), \quad \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$ $X(\omega) = X(-\omega), \quad R(\omega) = -R(-\omega)$ $F(-j\omega) = -F^*(j\omega)$

续表

名 称	时域	$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$	频域
反折特性	$f(-t)$		$F(-j\omega)$
对称特性	$F(j\omega)$		$2\pi f(-\omega)$
时频展缩特性	$f(at), a \neq 0$		$\frac{1}{ a } F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
时移特性	$f(t \pm t_0)$		$e^{\pm j\omega t_0} F(j\omega)$
	$f(at - b), a \neq 0$		$\frac{1}{ a } e^{-j\frac{b}{a}\omega} F\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
频移特性	$f(t) e^{\pm j\omega_0 t}$		$F[j(\omega \mp \omega_0)]$
卷积定理	时域	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega) F_2(j\omega)$
	频域	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$
时域微分	$f^{(n)}(t)$		$(j\omega)^n F(j\omega)$
时域积分	$f^{(-1)}(t)$		$\pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$
频域微分	$(-jt)^n f(t)$		$\frac{d^n}{d\omega^n} F(j\omega)$
频域积分	$\pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t)$		$F^{(-1)}(j\omega)$

### 3.4 周期信号的傅里叶变换

我们知道,傅里叶变换是由周期信号的傅里叶级数过渡而来的,那么周期信号的复振幅(表示其频谱)与当  $T \rightarrow \infty$  时过渡成的相应非周期信号的傅里叶变换之间有什么关系就是本节要关心的问题,从而将周期信号的频域分析方法与非周期信号的统一起来,即都采用傅里叶变换的方法分析,使这一工具得到更加广泛的应用。不过,周期信号是不满足绝对可积条件的,但在允许冲激存在的条件下,绝对可积的条件就成为不必要的限制了。其实我们在前面几节讨论中已经得到一些不满足绝对可积条件的信号的傅里叶变换,包括直流信号、正弦信号、余弦信号等。这些信号的频谱函数中皆含有冲激函数。

#### 3.4.1 一般周期信号的傅里叶变换

设任意周期信号  $f_T(t)$  的周期为  $T$ ,角频率  $\omega_0 = 2\pi/T$ 。将  $f_T(t)$  展开成指数型傅里叶级数:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

其中  $F_n$  为  $f_T(t)$  的复振幅。将上式两边取傅里叶变换,得

$$f_T(t) \longleftrightarrow F_T(j\omega) = \mathcal{F} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right]$$

因为  $F_n$  与  $t$  无关,根据线性特性有

$$F_T(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F} [e^{jn\omega_0 t}]$$

又因为

$$\mathcal{F} [e^{jn\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$$

所以

$$F_T(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (3-53)$$

由此可见,周期信号的傅氏变换是一个由冲激函数所组成的冲激序列。冲激序列的频率间隔为 $\omega_0$ ,即冲激位于信号的谐波频率( $0, \pm\omega_0, \pm2\omega_0, \dots$ )处,其强度等于傅里叶级数相对应的复振幅 $F_n$ 的 $2\pi$ 倍。冲激序列强度包络取决于 $F_n$ 。与以往的结论一致,周期信号的频谱是离散的。然而所不同的是谱线的长度不再是有限值而是强度各异的冲激函数。式(3-53)给出了周期信号的傅氏变换与其复振幅之间的一般关系。所以要从傅里叶变换的角度研究周期信号的频谱,首先由复振幅的定义求出该周期信号的复振幅 $F_n$ ,然后代入式(3-53)得到周期信号的傅里叶变换。

**【例 3-22】** 求周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的傅里叶变换。 $f(t)$ 的波形如图 3-30(a)所示。

**解:**前面讨论傅里叶级数时已经得到周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的复振幅为

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

其傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F_T(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= E\tau\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

其 $F_n$ 和傅氏变换如图 3-30(b)所示。

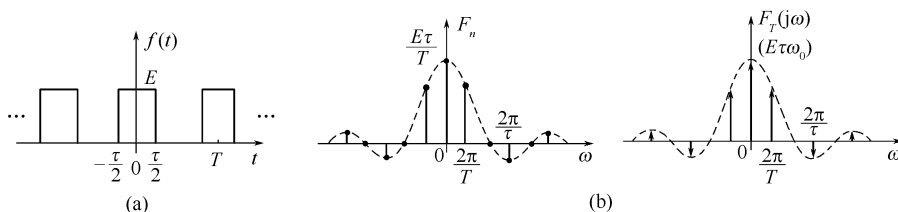


图 3-30 例 3-22 的图

**【例 3-23】** 求周期单位冲激序列 $\delta_T(t)$ 的傅里叶变换。其中, $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ ,如图 3-31(a)所示。

**解:** $\delta_T(t)$ 的复振幅为

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

所以

$$\begin{aligned} \delta_T(t) &\longleftrightarrow F_T(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

可见,周期单位冲激序列的傅里叶变换,只包含位于 $\pm n\omega_0$ 处的冲激,其强度均等于 $\omega_0$ ,如图 3-31(b)所示。

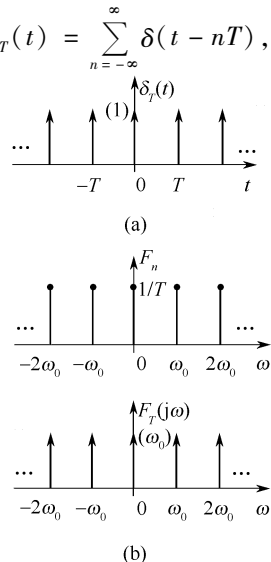


图 3-31 例 3-23 的图

### 3.4.2 周期信号的傅里叶级数与单脉冲信号的傅里叶变换

3.4.1 节所介绍的周期信号的傅里叶变换,是通过先求得周期信号的复振幅(即傅里叶级数)从而求得其傅里叶变换的。这种方法显然要复杂一些,因为求复振幅时要计算积分。下面讨论求周期信号傅氏变换的另一种方法。

若从一个周期信号  $f_T(t)$  中截取一个周期(如  $-T/2 \sim T/2$  或  $0 \sim T$ ),就得到一个非周期信号,称之为单脉冲信号,用  $f_0(t)$  表示,如图 3-32 所示。

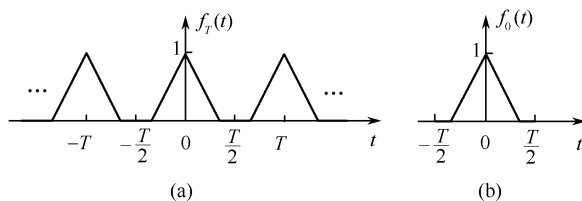


图 3-32 从周期信号中截取一个周期

显然  $f_0(t)$  与  $f_T(t)$  有下面的关系

$$f_T(t) = f_0(t) * \delta_T(t) \quad (3-54)$$

式中,  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ 。设  $f_0(t) \longleftrightarrow F_0(j\omega)$ , 根据时域卷积定理有

$$f_T(t) \longleftrightarrow F_T(j\omega) = F_0(j\omega) \cdot \mathcal{F}[\delta_T(t)]$$

由例 3-23 可得

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

所以有

$$\begin{aligned} F_T(j\omega) &= \omega_0 F_0(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(j\omega) \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(jn\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (3-55)$$

其中  $F_0(jn\omega_0)$  为单脉冲信号的傅里叶变换  $F_0(j\omega)$  中  $\omega$  取  $n\omega_0$ , 即

$$F_0(jn\omega_0) = F_0(j\omega) \big|_{\omega = n\omega_0} \quad (3-56)$$

这样,通过先求单脉冲信号的傅里叶变换,然后代入式(3-55)中就得到周期信号的傅里叶变换。

当周期信号的复振幅不方便得到时,用这种方法求其傅里叶变换更简单一些。

比较式(3-53)与式(3-55),可得

$$\omega_0 F_0(jn\omega_0) = 2\pi F_n$$

即

$$F_n = \frac{1}{T} F_0(jn\omega_0) = \frac{1}{T} F_0(j\omega) \big|_{\omega = n\omega_0} \quad (3-57)$$

上式表明,周期信号的傅里叶复系数(复振幅)  $F_n$  等于单脉冲信号的傅里叶变换  $F_0(j\omega)$  在  $n\omega_0$  频率点的值乘以  $1/T$ 。式(3-57)也提供了求取复振幅的一种方法。

**【例 3-24】** 将图 3-33(a) 所示周期信号展开成指数型傅里叶级数,并求其傅里叶变换。

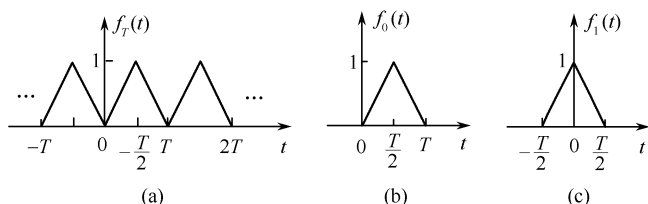


图 3-33 例 3-24 的图

**解:**将周期信号  $f_T(t)$  的一个周期截取成信号  $f_0(t)$ , 如图 3-33 (b) 所示。为了求  $f_0(t)$  的傅里叶变换  $F_0(j\omega)$ , 先得到时移信号  $f_1(t)$  的傅里叶变换  $F_1(j\omega)$ 。 $f_1(t)$  如图 3-33 (c) 所示。

$$\text{由时域卷积定理} \quad f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega) = \frac{T}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

$$\text{又因为} \quad f_0(t) = f_1\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$\text{所以} \quad f_0(t) \longleftrightarrow F_0(j\omega) = \frac{T}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega T}{4}\right) e^{-j\frac{\omega T}{2}}$$

由式(3-57)可得周期信号  $f_T(t)$  的复振幅为

$$F_n = \frac{1}{T} F_0(j\omega) \big|_{\omega=n\omega_0} = \frac{1}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{n\omega_0 T}{4}\right) e^{-j\frac{n\omega_0 T}{2}} = \frac{1}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{-jn\pi}$$

则其指数型傅里叶级数为

$$f_T(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{-jn\pi} \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

由式(3-55)可得周期信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} f_T(t) \longleftrightarrow F_T(j\omega) &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(jn\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{-jn\pi} \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

## 3.5 连续时间系统的频域分析

在对信号频谱分析的基础上, 本节讨论系统的频域分析。所谓频域分析法是指把系统的激励和响应关系应用傅里叶变换从时域变换到频域考察, 从处理时间变量  $t$  换成处理频率变量  $\omega$ , 通过响应的频谱函数来研究响应的频率结构及系统的功能。下面从系统的角度通过图 3-34 说明系统的频域分析方法。

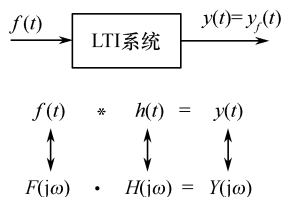


图 3-34 时域和频域分析示意图

### 3.5.1 系统频域分析法

由第 2 章连续系统的时域分析可知, 在零状态下输入信号  $f(t)$ , 系统的冲激响应  $h(t)$  和零状态响应满足

$$y_f(t) = f(t) * h(t)$$

将上式两端取傅里叶变换得 (设  $y_f(t) \longleftrightarrow Y(j\omega)$ ,  $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ ,  $h(t) \longleftrightarrow H(j\omega)$ )



$$Y(j\omega) = F(j\omega) \cdot H(j\omega) \quad (3-58)$$

上式便是系统输入和输出在频域中的关系,式中  $H(j\omega)$  将输入输出联系起来,是频域分析中的重要概念。将式(3-58)变形为

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} \quad (3-59)$$

这里,  $H(j\omega)$  称为系统的系统函数(也叫系统的频率响应),它等于输出的频谱函数与输入的频谱函数之比。随着输入信号(电压源或电流源)与待求响应(电压或电流)的不同,系统函数将具有不同的含义,即它可以是阻抗函数、导纳函数、电压比或电流比。

一般而言,系统函数  $H(j\omega)$  是一个复函数,可写为

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (3-60)$$

其中  $H(\omega)$  与  $\varphi(\omega)$  都是  $\omega$  的函数。将  $H(\omega)$  与  $\omega$  的关系称为幅频特性,  $\varphi(\omega)$  与  $\omega$  的关系称为相频特性,而且  $H(\omega)$  是  $\omega$  的偶函数,  $\varphi(\omega)$  是  $\omega$  的奇函数。

前面已经表明,系统函数  $H(j\omega)$  就是冲激响应  $h(t)$  的频谱函数,即有下面的关系

$$\left. \begin{aligned} H(j\omega) &= \mathcal{F}[h(t)] \\ h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] \end{aligned} \right\} \quad (3-61)$$

即

$$h(t) \longleftrightarrow H(j\omega) \quad (3-62)$$

由于冲激响应  $h(t)$  取决于系统本身,它描述的是系统的时域特性,因此  $H(j\omega)$  也同样仅仅取决于系统的结构,系统一旦给定,  $H(j\omega)$  也随之确定。系统不同,  $H(j\omega)$  也不同,所以  $H(j\omega)$  是在频域中表征系统的重要方式。

系统的频域分析法,就是利用系统函数对输入信号的频谱进行处理,求得输出信号的频谱函数,如式(3-58)所示,以揭示系统对输入信号的处理功能。频域分析法是信号分析和处理的有效工具。

### 3.5.2 系统频域分析法举例

【例 3-25】 已知某系统的系统函数为

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6}$$

当激励为  $f(t) = 2e^{-t}U(t)$  时,求系统的响应。

解:所求响应指零状态响应。设响应  $y_f(t) \longleftrightarrow Y(j\omega)$ ,  $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ , 根据频域分析法有

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega)F(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6} \cdot \frac{2}{j\omega + 1} = \frac{2j\omega}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)} \\ &= -\frac{1}{j\omega + 1} + \frac{4}{j\omega + 2} - \frac{3}{j\omega + 3} \end{aligned}$$

所以

$$y_f(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)] = (-e^{-t} + 4e^{-2t} - 3e^{-3t})U(t)$$

当然,若系统给出初始储能,则应考虑零输入响应和零状态响应。零输入响应只能采用第2章介绍的时域法来求解。

【例 3-26】 已知某系统的微分方程为

$$y'(t) + \frac{1}{2}y(t) = \frac{1}{2}f(t)$$

若激励  $f(t) = 12e^{-t}U(t)$ , 求系统的响应。

解: 令  $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ ,  $y(t) \longleftrightarrow Y(j\omega)$ , 对微分方程两边取傅里叶变换, 得

$$j\omega Y(j\omega) + \frac{1}{2}Y(j\omega) = \frac{1}{2}F(j\omega)$$

可得系统的系统函数为 
$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{1/2}{j\omega + 1/2}$$

由于  $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega) = \frac{12}{j\omega + 1}$ , 所以有

$$Y(j\omega) = H(j\omega)F(j\omega) = \frac{6}{(j\omega + 1/2)(j\omega + 1)} = \frac{12}{j\omega + 1/2} - \frac{12}{j\omega + 1}$$

所以响应为 
$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)] = 12(e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-t})U(t)$$

可见, 系统的微分方程与频域中的系统函数是一一对应的, 已知系统函数, 也能确定系统的微分方程。

【例 3-27】 试分析图 3-35 所示 RC 电路的阶跃响应。

解: 将 RC 电路中的  $C$  用  $\frac{1}{j\omega C}$  代替, 并设  $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ ,  $y(t) \longleftrightarrow Y(j\omega)$ , 根据系统函数的定义有

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

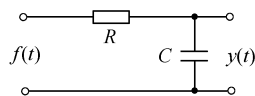


图 3-35 例 3-27 的图

若设  $a = \frac{1}{RC}$ , 则有 
$$H(j\omega) = \frac{a}{j\omega + a}$$

现在求阶跃响应, 则激励信号  $f(t) = U(t)$ , 所以

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega)F(j\omega) = \frac{a}{j\omega + a} \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi\delta(\omega) + \frac{a}{(j\omega)(j\omega + a)} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega + a} \end{aligned}$$

所以阶跃响应 
$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)] = (1 - e^{-at})U(t)$$

从此例可以知道, 若系统为电路图系统, 可以将电路中的元件用阻抗表示, 然后用相量法求得系统函数  $H(j\omega)$ , 从而用频域分析法求得响应。

【例 3-28】 如图 3-36(a) 所示系统, 已知乘法器的输入  $f_1(t) = \frac{\sin 2t}{t}$ ,  $f_2(t) = \cos 3t$ , 系

统函数  $H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 3 \text{ rad/s} \\ 0, & |\omega| > 3 \text{ rad/s} \end{cases}$ , 求输出  $y(t)$ 。

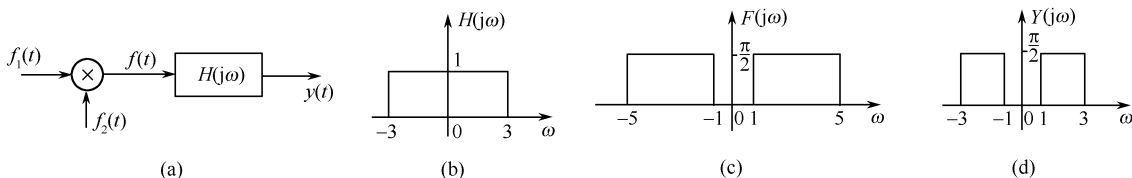


图 3-36 例 3-28 的图

解: 设乘法器的输出  $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ , 并设  $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ ,  $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$ ,  $f_2(t)$

$\longleftrightarrow F_2(j\omega), y(t) \longleftrightarrow Y(j\omega)$ , 则有

$$F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

由于

$$g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

令  $\tau=4$ , 根据对称性可得

$$f_1(t) = 2\text{Sa}(2t) \longleftrightarrow \pi g_4(\omega) = F_1(j\omega)$$

$$f_2(t) = \cos(3t) \longleftrightarrow \pi [\delta(\omega+3) + \delta(\omega-3)] = F_2(j\omega)$$

所以有

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \pi g_4(\omega) * \pi [\delta(\omega+3) + \delta(\omega-3)] \\ &= \frac{\pi}{2} [g_4(\omega+3) + g_4(\omega-3)] \end{aligned}$$

$F(j\omega)$  如图 3-36(c) 所示。系统函数  $H(j\omega) = g_6(\omega)$ , 如图 3-36(b) 所示。则有

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega) F(j\omega) \\ &= g_6(\omega) \cdot \frac{\pi}{2} [g_4(\omega+3) + g_4(\omega-3)] \\ &= \frac{\pi}{2} [g_2(\omega+2) + g_2(\omega-2)] \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \pi g_2(\omega) * \pi [\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)] \end{aligned}$$

$Y(j\omega)$  如图 3-36(d) 所示, 所以响应为

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(j\omega)] = \text{Sa}(t) \cos(2t)$$

可见, 若系统以框图形式给出, 必须一步一步求出各个信号的频谱函数, 最终求出响应的频谱函数。

**【例 3-29】** 如图 3-37(a) 所示系统, 其幅频特性  $H(\omega)$  如图 3-37(b) 所示, 相频特性  $\varphi(\omega) = 0$ 。激励信号  $f(t)$  为周期锯齿波, 如图 3-37(c) 所示, 求此激励下系统的响应。

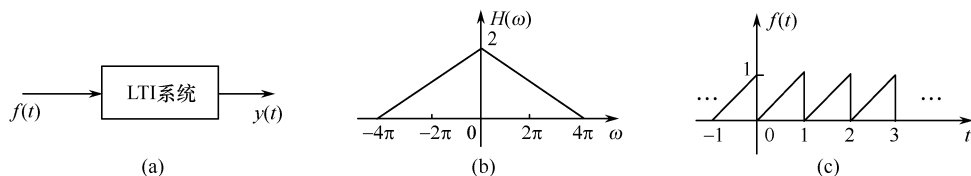


图 3-37 例 3-29 的图

**解:** 因为输入信号  $f(t)$  为周期信号, 所以

$$F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

将  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi$  及  $F_n = j/2n\pi, F_0 = 1/2$  代入得

$$F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{j}{n} \delta(\omega - 2\pi n) + 2\pi F_0 \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j}{n} \delta(\omega - 2\pi n)$$

设  $y(t) \longleftrightarrow Y(j\omega)$ , 则有

$$Y(j\omega) = H(j\omega) F(j\omega)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{j}{n} H(j2\pi n) \delta(\omega - 2\pi n) + \pi H(j0) \delta(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j}{n} H(j2\pi n) \delta(\omega - 2\pi n)$$

考虑到  $H(j\omega)$  的有限带宽,有

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= -jH(-j2\pi)\delta(\omega + 2\pi) + \pi H(j0)\delta(\omega) + jH(j2\pi)\delta(\omega - 2\pi) \\ &= -j\delta(\omega + 2\pi) + 2\pi\delta(\omega) + j\delta(\omega - 2\pi) \\ &= 2\pi\delta(\omega) - j[\delta(\omega + 2\pi) - \delta(\omega - 2\pi)] \end{aligned}$$

取其逆变换得 
$$y(t) = 1 - \frac{1}{\pi} \sin 2\pi t$$

这个例子的输入信号为周期信号,这时要用周期信号的傅里叶变换来求解。一般系统会限定处理有限的几个频率分量。除了这个例子所用的方法之外,当激励为周期信号时,还可以直接用傅里叶级数的方法进行求解,因为激励为周期信号,通过系统之后仍是周期信号。见下面的例 3-30。

**【例 3-30】** 某 LTI 系统的系统函数  $H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 3\text{rad/s} \\ 0, & |\omega| > 3\text{rad/s} \end{cases}$ , 若系统的激励  $f(t) =$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{jn\frac{\pi}{2}} e^{jn\omega_0 t}, \text{ 其中 } \omega_0 = 2\text{rad/s}, \text{ 求系统的响应 } y(t)。$$

**解:** 由已知的  $f(t)$  的表达式可得,该输入信号是周期信号,且是该信号的指数型傅里叶级数,所以有  $F_n = \frac{1}{2} e^{jn\frac{\pi}{2}}, \omega_0 = 2\text{rad/s}$ 。

设  $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega), y(t) \longleftrightarrow Y(j\omega)$ , 因为

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega) F(j\omega) = H(j\omega) \cdot 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

所以响应的傅里叶复振幅为

$$Y_n = F_n H(jn\omega_0) \quad (3-63)$$

其中

$$H(jn\omega_0) = H(j\omega) \Big|_{\omega = n\omega_0}$$

则系统的响应可写为 
$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (3-64)$$

根据  $H(j\omega)$  的非零值范围及  $\omega_0 = 2$ , 可得

$$\begin{aligned} y(t) &= F_{-1} H(-j2) e^{-j2t} + F_0 H(j0) e^0 + F_1 H(j2) e^{j2t} \\ &= \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j2t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j2t} \\ &= \frac{1}{2} - \sin 2t \end{aligned}$$

这种方法可以避免计算周期信号傅里叶变换的逆变换,所以更简单一些。

### 3.6 连续系统频域分析应用举例

傅里叶分析应用于通信系统的分析和设计中,是非常重要的工具。可以说通信系统的发展处处都有着傅里叶变换的运用。本节只举出几个最简单的应用例子,来讨论傅里叶分

析(频域分析法)在其中的应用。

### 3.6.1 无失真传输系统

通信系统的主要任务就是有效而可靠地传输信号。所谓无失真传输是指响应信号的波形是激励信号的精确再现,即响应信号和激励信号的波形完全一致,各点的瞬时值可以相差一个比例常数。同时,通过系统的信号不可避免地会发生时延,无失真传输要求时延是常数。在实际系统中,如果本来就是利用系统进行波形变换的,那么这种失真是我们所需要的。但在许多情况下则希望信号经过系统后尽可能实现无失真传输。下面讨论一个无失真传输系统应该满足的条件。

设激励信号为  $f(t)$ , 响应为  $y(t)$ , 无失真传输的条件为

$$y(t) = kf(t - t_0) \quad (3-65)$$

其中  $k$  为常数,  $t_0$  为延迟时间。

从频域角度来分析, 对式 (3-65) 取傅里叶变换, 并设  $y(t) \longleftrightarrow Y(j\omega)$ ,  $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ , 有

$$Y(j\omega) = kF(j\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (3-66)$$

从系统角度考虑, 又有

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot F(j\omega) \quad (3-67)$$

对照式 (3-66) 和式 (3-67) 可得

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0} \quad (3-68)$$

这就是说, 为了实现无失真传输, 该系统的系统函数  $H(j\omega)$  必须具有式 (3-68) 的形式, 对系统的频率响应提出了条件, 即无失真传输系统的条件。它表明在全部频率范围内系统必须具有的幅频特性和相频特性为

$$\left. \begin{aligned} H(\omega) &= k \\ \varphi(\omega) &= -\omega t_0 \end{aligned} \right\} \quad (3-69)$$

即可实现无失真传输。系统函数的幅频特性是一个常数, 相频特性与频率成正比, 是通过原点的一条直线, 斜率为  $-t_0$ 。无失真传输系统的频率特性曲线如图 3-38 所示。

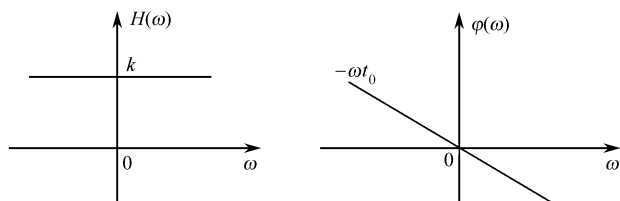


图 3-38 无失真传输系统的幅频特性和相频特性曲线

为了达到无失真传输, 在理论上要求系统在整个频率范围内都满足无失真传输条件。但是由于可实现性的限制, 实际上不可能构成这样的系统。实际的系统只要在所需要的带宽中满足无失真条件就可以了。

### 3.6.2 理想低通滤波器

理想低通滤波器是具有这样功能的系统, 即低于某一频率  $\omega_c$  的所有信号能无失真地通过(这个频率范围称为通带), 高于  $\omega_c$  的信号(这个频率范围称为阻带)则完全阻塞,  $\omega_c$  称

为截止频率。可见,理想低通滤波器在通带内是一个无失真传输系统。因此,理想低通滤波器的系统函数应为

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 \times e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3-70)$$

其频谱如图 3-39 所示。

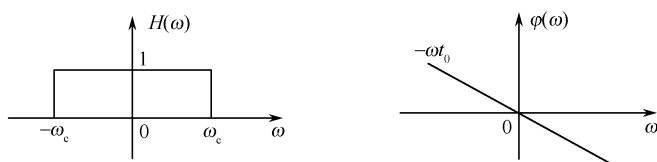


图 3-39 理想低通滤波器的频响特性曲线

因为系统的冲激响应与系统函数为一对傅氏变换对,所以理想低通滤波器的冲激响应为

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[g_{2\omega_c}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}] = \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}[\omega_c(t - t_0)]$$

其波形如图 3-40 所示。

由此可见,与输入信号相比, $h(t)$ 产生了严重失真。这是因为 $\delta(t)$ 的频带为无限宽而理想低通滤波器通带为 $\omega_c$ ,经过理想低通后,它必然对信号波形产生影响,即高于 $\omega_c$ 的频率分量都衰减为零。若 $\omega_c$ 增大, $h(t)$ 峰值增加,脉宽变窄,当 $\omega_c \rightarrow \infty$ 时,可以实现无失真传输,但系统已不是理想低通滤波器了。从图 3-40 中我们还可以看到,虽然 $\delta(t)$ 作用于 $t=0$ ,但 $h(t)$ 在 $t < 0$ 就有响应,显然是违背因果关系的,所以理想低通滤波器是物理上无法实现的。

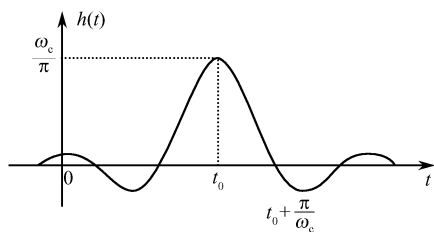


图 3-40 理想低通滤波器的  $h(t)$

一般说来,就时间特性而言,一个物理可实现系统的冲激响应 $h(t)$ 必须是因果的。而从频率特性来看,物理可实现系统的频率响应 $H(j\omega)$ 必须满足以下条件:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty$$

此条件称为佩利-维纳(Paley-Wiener)准则。由(1)式可知,幅度响应在某一频带内为零的系统是不可物理实现的。依此原理也可以判定理想低通滤波器在物理上是不可实现的。

理想低通滤波器的阶跃响应也可以用频域分析法求出,在此不做详细讨论,请参阅相关书籍。

虽然理想低通滤波器物理不可实现,但它的特性与实际滤波器相类似,对于实际系统具有指导意义。如 RC 积分电路、RLC 串联电路等就可组成实际的低通滤波器。关于各种滤波器电路的分析和设计将在后续课程中研究。

### 3.6.3 调制与解调

调制就是用一个信号去控制另一个信号的某一参数的过程。没有适当的调制,电子通信是根本无法实现的。无线电通信是用空间辐射方式传送信号的。比如要传送语音信号,将语

音信号作为调制信号,通过调制,把它所携带的信息通过频率高得多的载波信号辐射出去,到了接收端后再通过解调,从已经调制的载波信号中把信息恢复出来。另一方面,通过调制将所传送的信号以不同频率传送,可以在同一信道传送多路信号而互不干扰。当然,调制还可在其他技术领域中的应用。下面,利用频域分析来分析幅度调制与解调的原理。

设  $f(t)$  为待传输的信号,  $s(t) = \cos \omega_0 t$  为载波信号,  $\omega_0$  为载波频率,则发送端的调幅信号为

$$y(t) = f(t) \cdot \cos \omega_0 t$$

设  $y(t) \longleftrightarrow Y(j\omega)$ ,  $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ , 则有

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} \{ F[j(\omega + \omega_0)] + F[j(\omega - \omega_0)] \} \end{aligned} \quad (3-71)$$

幅度调制的方框图及频谱变换关系如图 3-41 所示。

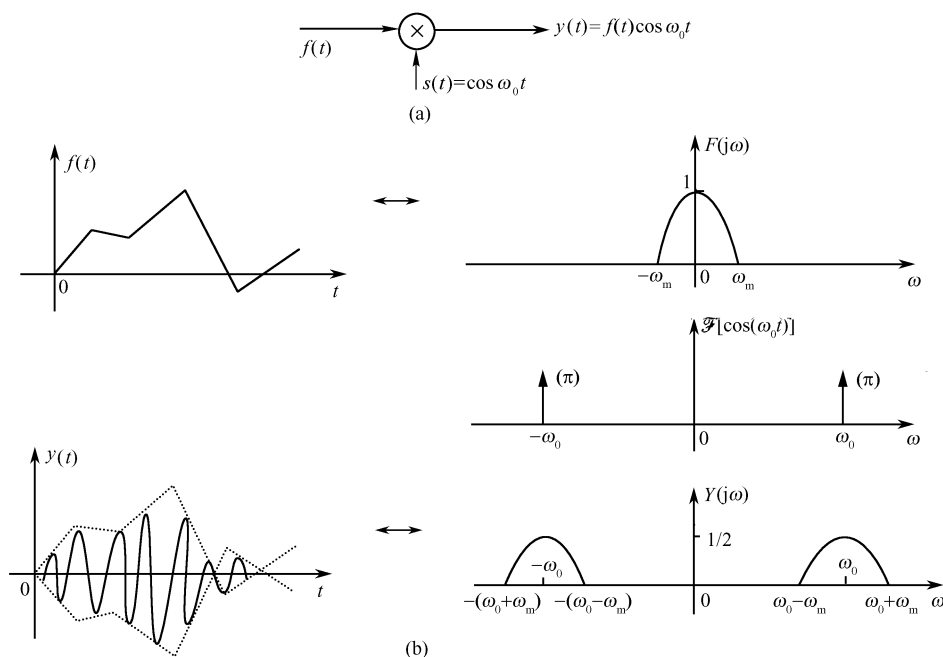


图 3-41 幅度调制的方框图及频谱

由图 3-41(b) 可见,原信号的频谱  $F(j\omega)$  经过调制被搬移至  $\pm \omega_0$  处,即所需的高频范围内,成为已调的高频信号,很容易以电磁波形式辐射。

由已调制信号  $y(t)$  恢复原始信号  $f(t)$  的过程称为解调。图 3-42(a) 所示为同步解调的方框图。由图 3-42 可得

$$f_1(t) = y(t) \cos \omega_0 t = f(t) \cdot \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} f(t) (1 + \cos 2\omega_0 t)$$

设  $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$ , 则有

$$\begin{aligned} F_1(j\omega) &= \frac{1}{2} F(j\omega) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \pi [\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega - 2\omega_0)] \\ &= \frac{1}{2} F(j\omega) + \frac{1}{4} \{ F[j(\omega + 2\omega_0)] + F[j(\omega - 2\omega_0)] \} \end{aligned} \quad (3-72)$$

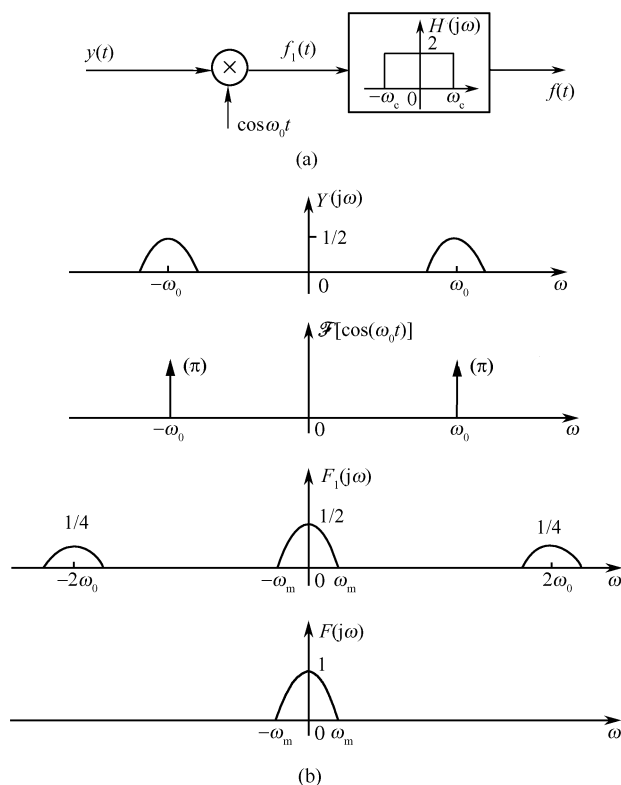


图 3-42 同步解调的方框图及频谱

其频谱如图 3-42(b) 所示。由此可知,  $F_1(j\omega)$  中果然包含原信号  $f(t)$  的全部信息  $F(j\omega)$ , 此外, 还有附加的高频分量。这时, 在  $f_1(t)$  后接一个低通滤波器, 假设低通滤波器的幅频特性如图 3-42(a) 所示, 就能使  $\omega_m$  以下的频率分量通过而抑制大于  $\omega_m$  的信号, 从而滤除多余的高频信号, 达到恢复调制信号  $f(t)$ , 完成解调的目的。当然, 此时截止频率  $\omega_c$  应满足  $\omega_m < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_m$ 。

## 3.7 抽样及抽样定理

抽样(也称取样、采样)技术已广泛应用在各种技术领域中。对于模拟信号, 我们并不需要无限多个连续的时间点上的瞬时值来决定其变化规律, 而只需要各个等间隔点上的离散的抽样值就够了, 也就是将连续信号进行抽样变成离散的脉冲序列, 即所谓的抽样信号。抽样信号中包含有原信号的所有信息。在一定条件下, 从抽样信号中可完整地恢复原来的信号。下面就讨论信号的抽样和信号的恢复, 利用频域分析方法, 可以很清楚地看到这一过程。

### 3.7.1 信号的抽样

若  $P_T(t)$  为脉宽为  $\tau$  的矩形脉冲序列, 其幅度为 1, 周期为  $T_s$ 。使信号  $f(t)$  与  $P_T(t)$  相乘, 即为对  $f(t)$  进行抽样, 输出信号用  $f_s(t)$  表示, 称为抽样信号, 即

$$f_s(t) = f(t) \cdot P_T(t) \quad (3-73)$$



图 3-43 所示是抽样系统及抽样信号的时域描述。

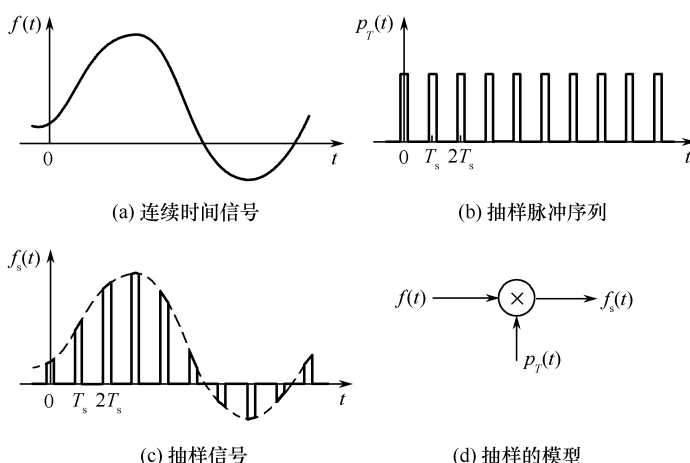


图 3-43 信号的抽样

若矩形脉冲序列换成周期为  $T_s$  的冲激函数序列  $\delta_{T_s}(t)$ , 这种抽样就称为冲激抽样或理想抽样。此时抽样信号为

$$f_s(t) = f(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (3-74)$$

即抽样信号是由一系列冲激信号构成的, 每个冲激间隔  $T_s$ , 其强度等于连续信号  $f(t)$  的抽样值  $f(nT_s)$ 。若设  $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ , 可以得到抽样信号的频谱函数为

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)]$$

由前面所讨论过的  $\delta_T(t)$  的傅里叶变换有

$$\mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)] = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

式中,  $\omega_s = 2\pi/T_s$ 。所以有

$$\begin{aligned} F_s(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)] \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)] \end{aligned} \quad (3-75)$$

冲激抽样信号及抽样信号的频谱如图 3-44 所示。

由图 3-44 可知, 抽样信号  $f_s(t)$  的频谱由原信号频谱  $F(j\omega)$  的无限个频移项组成, 频移的角频率为  $n\omega_s$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), 其幅值为原频谱的  $1/T_s$ 。

不过, 能画出图 3-44(f) 中所示的抽样信号的频谱应该是在一定限制条件下才有的结果。这个限制条件是

$$\omega_s \geq 2\omega_m \quad \text{或} \quad T_s \leq \frac{1}{2f_m} \quad (3-76)$$

只有满足这个条件, 各相邻频移才不会发生混叠, 如图 3-45 所示。

可见, 若想从抽样信号的频谱  $F_s(j\omega)$  中得到原信号的频谱  $F(j\omega)$ , 即从抽样信号  $f_s(t)$  中恢复原信号  $f(t)$ , 必须满足式 (3-76) 的条件, 使抽样信号的频谱不发生混叠。

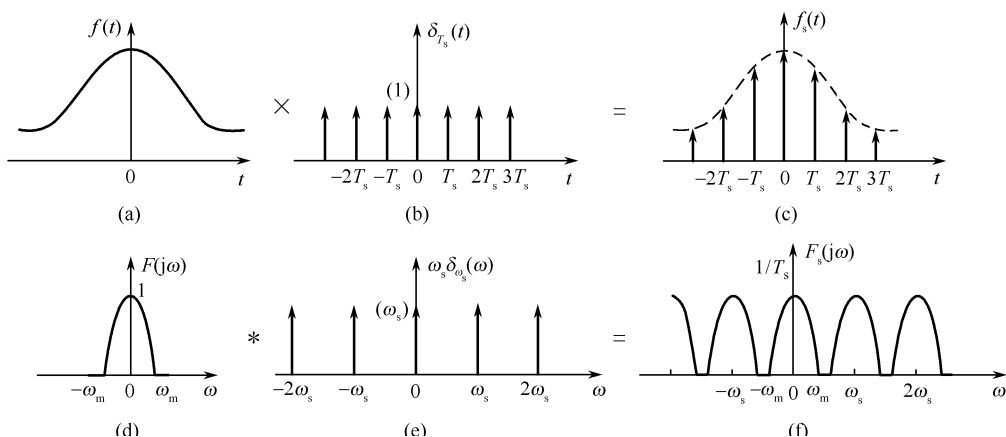


图 3-44 冲激抽样及抽样信号的频谱

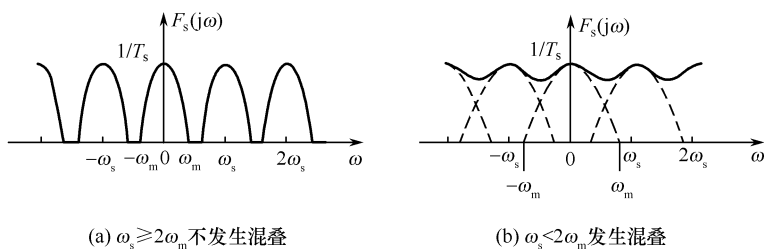


图 3-45 混叠现象

### 3.7.2 时域抽样定理

我们仍接着讨论冲激抽样。由前面的讨论可知,抽样信号中包含有原信号的所有信息,这从频谱关系看得很清楚。在满足  $\omega_s \geq 2\omega_m$  的条件下,使  $f_s(t)$  通过一个增益(幅度)为  $T_s$  的理想低通滤波器,把所有的高频分量滤去,仅留下原信号的频谱  $F(j\omega)$  就可以达到恢复出原信号  $f(t)$  的目的。为此,设理想低通滤波器的系统函数为

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (3-77)$$

其中截止角频率  $\omega_c$  应满足

$$\omega_m < \omega_c \leq \omega_s - \omega_m \quad (3-78)$$

这一信号的频谱变换过程如图 3-46 所示。

从频域的角度分析,可知

$$F(j\omega) = F_s(j\omega) \cdot H(j\omega) \quad (3-79)$$

从时域角度分析,有

$$f(t) = f_s(t) * h(t) \quad (3-80)$$

因为

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\omega)] = T_s \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \quad (3-81)$$

而

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

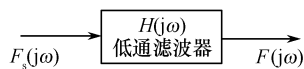


图 3-46 从抽样信号恢复原信号的频谱变换示意

所以有

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) * \left[ T_s \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \text{Sa}(\omega_c t) \right] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T_s \omega_c}{\pi} f(nT_s) \text{Sa}[\omega_c(t - nT_s)]
 \end{aligned} \quad (3-82)$$

式(3-82)表明,原信号 $f(t)$ 可表示为无穷个抽样函数(Sa函数)的线性组合,Sa函数的峰值由 $f(nT_s)$ 决定。从抽样信号恢复出原信号的时域、频域关系如图3-47所示。

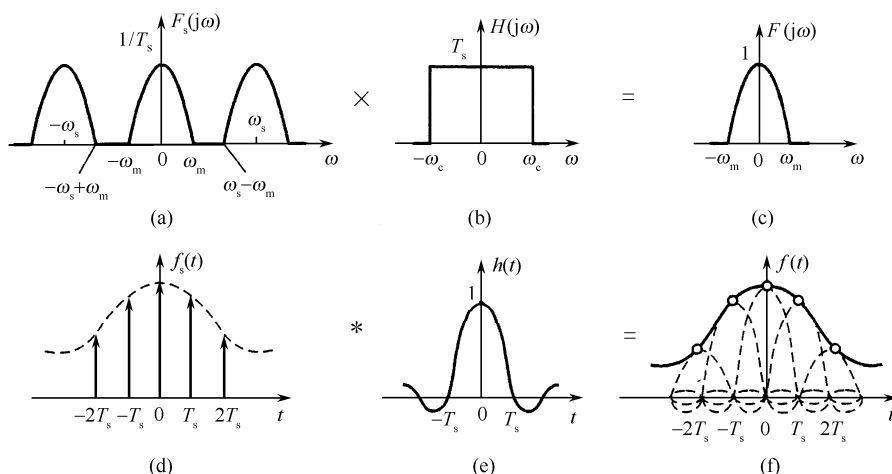


图 3-47 由抽样信号恢复连续信号( $\omega_c = \omega_s/2$ )

由上述讨论,可以总结出重要的时域抽样定理:一个频带受限的信号 $f(t)$ (即信号 $f(t)$ 在区间 $-\omega_m \sim +\omega_m$ 的范围内频谱为非零值,在此区间之外的区域为零),可唯一地由其均匀间隔的抽样值确定,当且仅当抽样频率满足 $\omega_s \geq 2\omega_m$ (或 $f_s \geq 2f_m$ ),或者说抽样周期满足 $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ 时。不满足时域抽样定理时,频域中会产生混叠,就不能恢复信号 $f(t)$ 。通常将最低允许抽样频率 $f_s = 2f_m$ 称为奈奎斯特频率,把最大允许抽样间隔 $T_s = \frac{1}{2f_m}$ 称为奈奎斯特间隔。

需要说明的是,除了时域抽样定理之外,还有频域抽样定理与时域抽样定理相对称。在此就不再讨论了,读者可参阅相关书籍。

**【例 3-31】** 已知一个信号处理系统如图 3-48(a)所示,其中 $f(t) = \frac{\omega_m}{\pi} \text{Sa}(\omega_m t)$ ,

$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ ,  $H_1(j\omega)$ 的频谱如图 3-48(b)所示,试求:

(1)  $f_1(t)$ 的频谱;

(2) 欲使 $f_s(t)$ 包含 $f_1(t)$ 的全部信息,最大采样间隔 $T_s$ 应为多大?

(3) 若以 $2\omega_s$ ( $\omega_s$ 为奈奎斯特角频率)进行采样,欲使 $y(t) = f_1(t)$ ,理想低通滤波器 $H_2(j\omega)$ 的截止频率 $\omega_c$ 的取值范围应为多大?

**解:**(1) 因为 $g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ ,根据对称性可得信号 $f(t)$ 的频谱函数为

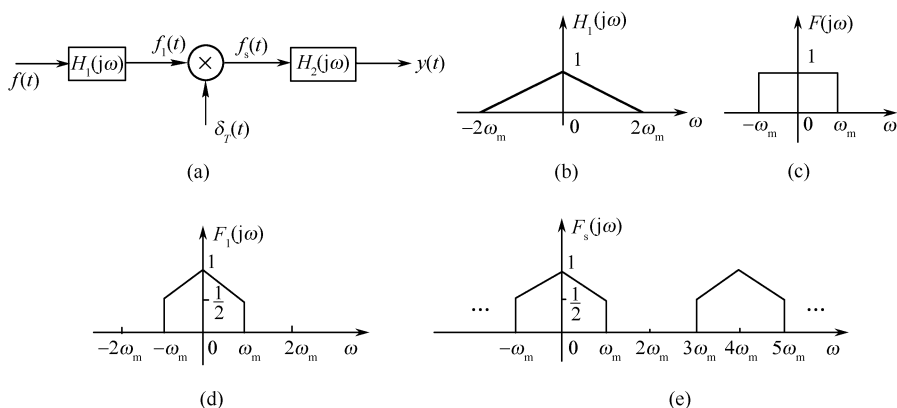


图 3-48 例 3-31 的图

$$F(j\omega) = g_{2\omega_m}(\omega)$$

其频谱如图 3-48(c) 所示。

设  $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(j\omega)$ , 则由系统可知

$$F_1(j\omega) = H_1(j\omega) F(j\omega)$$

其频谱如图 3-48(d) 所示。

(2) 由系统可知,  $f_1(t)$  经冲激抽样得到抽样信号  $f_s(t)$ , 欲使  $f_s(t)$  包含  $f(t)$  的全部信息, 则需满足时域抽样定理, 即抽样间隔  $T_s \leq \frac{1}{2f_m} = \frac{\pi}{\omega_m}$ , 其中  $\omega_m$  为  $F_1(j\omega)$  的带宽, 所以最大采样间隔  $T_s = \pi/\omega_m$ 。

(3) 由时域抽样定理得奈奎斯特频率  $f_s = 2f_m$  或  $\omega_s = 2\omega_m$ 。现在以  $2\omega_s$  进行抽样, 满足抽样频率大于  $2\omega_m$  的条件, 即现在的抽样频率为  $2\omega_s = 4\omega_m$ 。所以得到抽样信号  $f_s(t)$  的频谱函数为

$$\begin{aligned} F_s(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * \mathcal{F}[\delta_T(t)] \\ &= \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * \left[ 4\omega_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n4\omega_m) \right] \\ &= \frac{2\omega_m}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_1[j(\omega - n4\omega_m)] \end{aligned}$$

即  $f_s(t)$  的频谱是  $F_1(j\omega)$  的周期延拓, 每隔  $4\omega_m$  出现一次。  $F_s(j\omega)$  如图 3-48(e) 所示。可见, 要从  $f_s(t)$  中恢复出  $f_1(t)$ , 则  $H_2(j\omega)$  必须是一理想低通滤波器, 它将频率小于  $\omega_m$  的信号分量通过, 频率大于  $\omega_m$  的信号分量滤掉。由  $F_s(j\omega)$  的频谱可得  $H_2(j\omega)$  的截止频率  $\omega_c$  应满足  $\omega_m < \omega_c \leq 3\omega_m$ 。

## 3.8 MATLAB 应用举例

### 3.8.1 周期信号的分解与合成

利用 MATLAB 中计算定积分的函数 quad 或 quadv, 可以方便地计算周期信号的傅里叶级

数。quad 和 quadv 的调用格式为

$y = \text{quad}(\text{FUN}, A, B)$  和  $y = \text{quadv}(\text{FUN}, A, B)$

其中, FUN 是被积函数的函数名或函数句柄; A 和 B 分别是积分下限和上限。比如, 三角型傅里叶级数的系数可以由下式求出:

$$a_n = 2 * \text{quad}(\text{FUN}, -T/2, T/2) / T$$

其中, T 是信号的周期。

【例 3-32】 利用 MATLAB 求图 3-49 所示周期方波的傅里叶级数, 绘出单边幅度谱和单边相位谱; 然后将求得的系数代入  $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$ , 求出  $f(t)$  的近似值, 画出  $N=6$  时的合成波形。

```
% Program ch3_1
%% Original wave plot
T=5;
width=2;
A=2.5;
t1 = -T/2:0.01:T/2;
ft1 = A * rectpuls(t1,width);
t = [t1 -T t1 T];
ft = repmat(ft1,1,3);
subplot(3,1,1);
plot(t,ft);
set(gca,'ylim',[0,A+0.2]);
xlabel('t');
title('Original square waveform');
box off;
```

```
% % Spectrum and envelop
w0 = 2 * pi / T;
N = 6;
K = 0:N;
F = @ (n) (2 * quadv(@ (t) (A * rectpuls(t,width) * cos(n * w0 * t)), -T/2,T/2) / T);
for k = 0:N
    Fn(k+1) = F(k);
end
Fn(1) = Fn(1) / 2;

% Magnitude spectrum
subplot(3,2,3);
stem(K * w0,abs(Fn),'markerSize',4,'markerFace','k');
hold on;
xaxis = get(gca,'xlim');
```

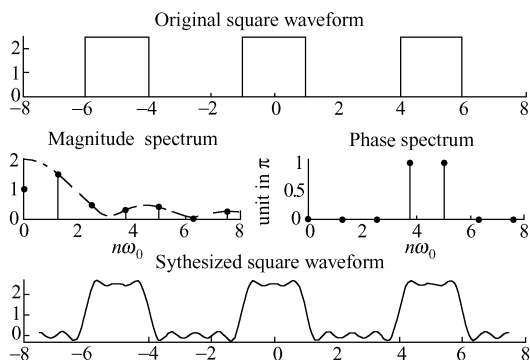


图 3-49 例 3-32 的图

```

w=0:0.005:axis(2);
% Envelop
en=2*(A*width/T)*sinc(w*width/2/pi);
plot(w,abs(en),'-');
set(gca,'ylim',[0,2*A*width/T + 0.1]);

% Phase spectrum
xlabel('n\omega_0');
title('Magnitude spectrum');
hold off;
box off;
ph=angle(Fn);
subplot(3,2,4);
stem(K*w0,ph/pi,'markerSize',4,'markerFace','k');
set(gca,'ylim',[0 1.1]);
xlabel('n\omega_0');
ylabel('unit in \pi');
title('Phase spectrum');
box off;

% % Synthesized waveform
t=-1.5*T:0.01:1.5*T;
K=K.';
ft=Fn*cos(w0*K*t);
subplot(3,1,3);
plot(t,ft);
set(gca,'ylim',[-0.13*A,1.1*A]);
title('Synthesized square waveform');
box off;

```

### 3.8.2 非周期信号频谱的 MATLAB 求解

虽然 MATLAB 提供了函数 `Fourier`, 用于计算符号函数的傅里叶变换, 但多数情况下用 `Fourier` 计算得到的表达式往往非常烦琐, 结果并不令人满意。更多情况下, 利用 MATLAB 提供的其他函数来求信号频谱的数值解更为方便。其中两个常用的函数是 `quad` 和 `quadl`, 它们的调用格式如下:

```
y = quad(FUN,a,b) 和 y = quadl(FUN,a,b)
```

其中, `FUN` 是表示被积函数名称的字符串或者函数句柄, `a` 和 `b` 分别表示积分的下限和上限。

**【例 3-33】** 用 MATLAB 计算门信号  $g_2(t)$  的频谱, 画出  $[-2\pi, 2\pi]$  区间的频谱。

**解:** 用于求解的 MATLAB 程序如下。其频谱如图 3-50 所示。

```

% Program ch3_2
% Waveform of time-domain signal

```

```

tao=2;
subplot(211);
X=[-tao/2 -tao/2 tao/2 tao/2];
Y=[0 1 1 0];
plot(X,Y);
title('Waveform of the original
signal');
axis([-tao,tao,0,1.1]);
box off;

```

```

% Fourier transform
w1=-2*pi;w2=-w1;
t1=-tao;t2=-t1;
N=500;
wk=linspace(w1,w2,N);
F=zeros(1,N);
Fw=@(w)(quad(@(t)(rectpuls(t,tao).*exp(-j*w*t)),t1,t2));
for k=1:N
    F(k)=Fw(wk(k));
end

```

```

% Drawing and annotation
subplot(2,1,2);
plot(wk,real(F));
yscale=get(gca,'ylim');
set(gca,'ylim',[yscale(1),yscale(2)+0.2]);
label={'2\pi';'-\pi';'0';'\pi';'2\pi'};
x=[-2*pi -pi 0 pi 2*pi];
y=yscale(1)*ones(1,5)-0.2;
set(gca,'xtick',[-2*pi -pi 0 pi 2*pi],'xticklabel',[]);
text(x,y,label);
xlabel('\omega');
title('Spectrum of g_{2}(t)');
grid;
box off;

```

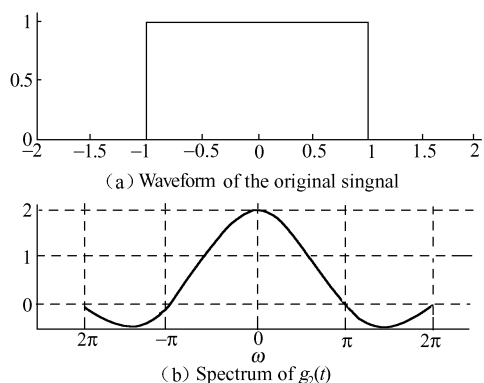


图 3-50 例 3-33 的图

### 3.8.3 用 MATLAB 计算连续系统的频率响应

如果系统的微分方程已知,可以利用函数 `freqs` 求出系统的频率响应,其一般调用格式为

$$H = \text{freqs}(b, a, w)$$

其中,  $b$  和  $a$  分别为由微分方程右边和左边各阶导数前的系数组成的向量,  $w$  是由计算频率响应的频率抽样点构成的向量。

**【例 3-34】** 求以下系统的频率响应:  $y'(t) + 2y(t) = f(t)$ 。

解:程序代码如下。其特性曲线如图 3-51 所示。

```
% Program ch3_3
b=1;
a=[1 2];
fs=0.01*pi;
w=0:fs:4*pi;
H=freqs(b,a,w);
subplot(2,1,1);
plot(w,abs(H));
xlabel('Frequency(rad/s)');
ylabel('Magnitude');
box off;
grid;
subplot(2,1,2);
plot(w,180*angle(H)/pi);
xlabel('Frequency(rad/s)');
ylabel('Phase(degree)');
box off;
grid;
```

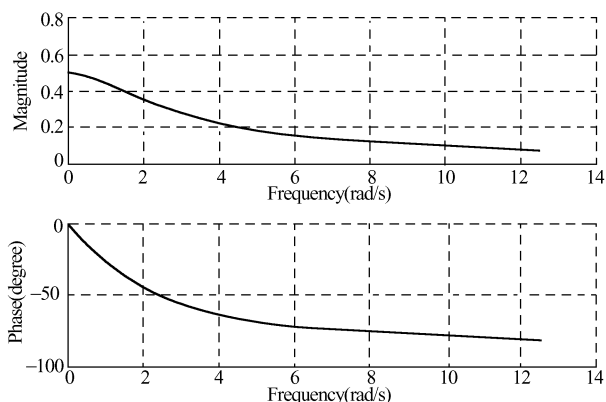


图 3-51 例 3-34 的图

## 本章关键概念小结

- 满足狄里赫利条件的周期信号可展开为傅里叶级数。
- 傅里叶级数可以有三角型傅里叶级数和指数型傅里叶级数。
- 周期信号的傅里叶级数展开式,表示了信号的频率特性。
- 根据三角型傅里叶级数可以知道信号的单边频谱。
- 根据指数型傅里叶级数可以知道信号的双边频谱。
- 信号的频谱由振幅谱和相位谱组成。
- 周期信号的频谱是离散谱,谱线出现在谐波处。
- 非周期信号通过求其傅里叶变换得到其频谱,为连续谱。
- 傅里叶变换的性质表明时域变换与相应于频域所发生变化之间的关系,如信号的时域平移不改变信号的振幅谱,只增加附加相移。
- 周期信号的傅里叶变换可以由其复振幅和冲激求得。
- 系统的频域分析是根据信号频谱分析进行的。
- 系统的系统函数(频率响应)是角频率  $\omega$  的函数,它乘以输入信号的频谱就可以得到输出信号的频谱。
- 系统函数是冲激响应的傅里叶变换。
- 系统函数的模值是系统的振幅响应(幅频特性),辐角是系统的相位响应(相频特性)。
- 系统函数是系统的频域描述方式,可以由微分方程或电路图求得。



## 习题

3.1 求下列周期信号的基波角频率  $\omega_0$  和周期  $T$ 。

- (1)  $A\cos 4t + B\sin 6t$       (2)  $A\sin 2\pi t - B\sin 3\pi t + C\sin 5\pi t$       (3)  $(\sin \pi t)^2$       (4)  $e^{j10t}$   
 (5)  $|\cos \pi t|$       (6)  $(\cos 2t - \sin 5t)^2$       (7)  $e^{-jt} + \cos 5t$

3.2 一连续周期信号  $f(t)$ , 周期  $T=8$ , 已知其非零复傅里叶系数是:  $F_1 = F_{-1} = 2, F_3 = F_{-3}^* = 4j$ , 试将  $f(t)$  展开成三角型傅里叶级数, 求  $A_n$  并画出单边幅度谱和相位谱。

3.3 已知连续周期信号  $f(t) = 2 + \cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + 4\sin\left(\frac{5}{3}\pi t\right)$ , 将其表示成复指数信号形式, 求  $F_n(jn\omega_0)$  并画出双边幅度谱和相位谱。

3.4 已知连续周期信号的周期  $T=2$ , 在一个周期内有

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{T}t^2 + t, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ -\frac{2}{T}t^2 + t, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

(1) 求  $f(t)$  的三角型傅里叶级数; (2) 比较  $f(t), f'(t), f''(t)$  的波形和频谱。

3.5 试求图 3-52 所示周期信号的复傅里叶系数, 并比较其特点 (提示: 可根据时移性、线性特性来求解)。

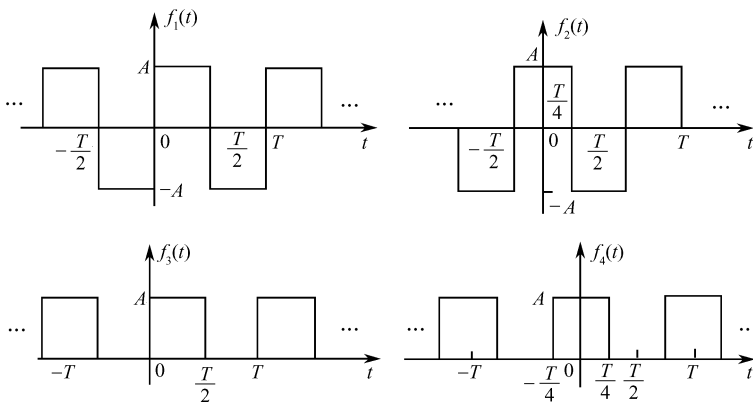


图 3-52

3.6 求图 3-53 所示周期信号的傅里叶系数。

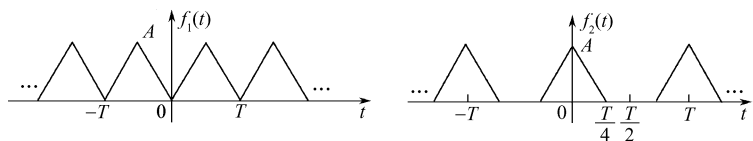


图 3-53

3.7\* 电路如图 3-54 所示,  $u_s(t) = 220\sqrt{2}\cos(314t)$  V, 经理想全波整流后为减小其交流成分, 以  $\pi$  型 LC 滤波器滤波。已知  $C = 8\mu\text{F}, R = 1\text{k}\Omega$ 。要使负载  $R$  上二次谐波分量的有效值小于直流分量的 2%, 求  $L$  应取何值?

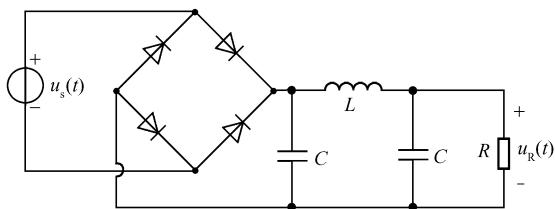


图 3-54

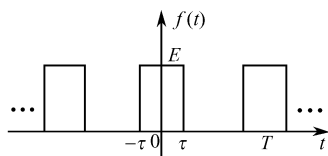


图 3-55

3.8\* 求周期信号  $f(t)$  的傅里叶级数表达式。已知在一个周期内  $f(t) = e^{-t}$ ,  $-1 < t < 1, T=2$ 。

3.9\* 已知 LTI 系统的冲激响应为  $h(t) = e^{-4t}U(t)$ , 对下列各个输入, 求系统输出的复傅里叶系数。

(1)  $f(t) = \cos 2\pi t$       (2)  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k)$

3.10\* 已知周期矩形信号  $f(t)$  的波形如图 3-55 所示, 计算当信号参数分别为  $T=1\mu s, \tau=0.5\mu s, E=1V$  和  $T=3\mu s, \tau=1.5\mu s, E=3V$  时:

- (1)  $f(t)$  的谱线间隔和带宽; (2) 两种情况  $f(t)$  的基波幅度之比;  
 (3) 第一种情况  $f(t)$  的基波幅度与第二种情况  $f(t)$  的几次谐波分量幅度相同?  
 3.11 求图 3-56 所示各信号的傅里叶变换。

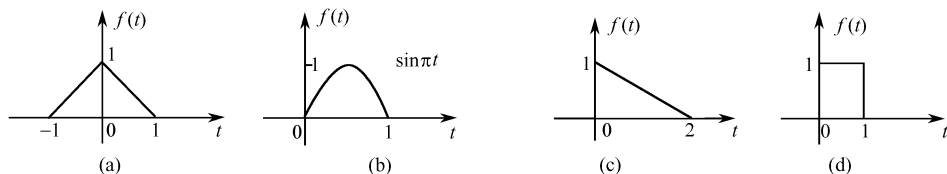


图 3-56

3.12 求图 3-57 所示各信号的傅里叶变换(可利用 3.11 题的结果)。

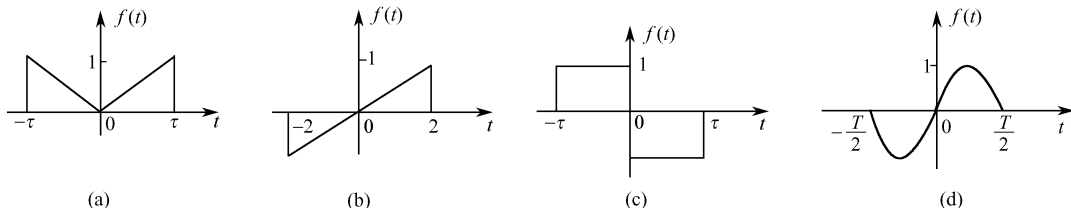


图 3-57

3.13 求下列信号的傅里叶变换。

(1)  $e^{-3t}[U(t+2) - U(t-3)]$       (2)  $U(t/2 - 1)$       (3)  $e^{2+t}U(-t+1)$       (4)  $e^{-j\omega} \delta(t-2)$   
 (5)  $e^{-2(t-1)}U(t)$       (6)  $e^{-2(t-1)}\delta(t-1)$       (7)  $e^{2t}U(-t+1)$       (8)  $U(t) - U(t-3)$       (9)  $1 + U(t)$

3.14 已知信号  $f_1(t), f_2(t)$  的带宽分别为  $\omega_1, \omega_2$ , 且  $\omega_1 > \omega_2$ , 求下列信号的带宽。

(1)  $f_1(t) \cdot f_2(t)$       (2)  $f_1(t) * f_2(t)$       (3)  $f_1(t) + 2f_2(t)$       (4)  $f_1^2(t) * f_2(t)$       (5)  $f_1(2t) \cdot f_2(t-1)$

3.15 利用傅里叶变换的对称性, 求下列信号的傅里叶变换。

(1)  $f(t) = \frac{2\beta}{t^2 + \beta^2}$       (2)  $f(t) = \frac{\sin 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}$       (3)  $f(t) = [\text{Sa}(2\pi t)]^2$       (4)  $f(t) = \frac{1}{\pi t}$

3.16 已知  $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ , 利用傅里叶变换的性质, 求下列信号的傅里叶变换。

- (1)  $f(3t-5)$  (2)  $f(1-t)$  (3)  $tf(3t)$  (4)  $e^{jt}f(3-2t)$   
 (5)  $(1-t)f(1-t)$  (6)  $(2t-2)f(t)$  (7)  $t \frac{d}{dt}f(t)$  (8)  $e^{-j\omega t} \frac{d}{dt}f(t)$   
 (9)  $\int_{-\infty}^{t+5} f(\tau) d\tau$  (10)  $\int_{-\infty}^{1-t/2} f(\tau) d\tau$  (11)  $\frac{d}{dt}f(t) * \frac{1}{\pi t}$  (12)  $t \frac{d}{dt}f(1-t)$   
 (13)  $(t-2)f(t)e^{j2(t-3)}$  (14)  $f(t)U(t)$  (15)  $f(t)\cos 2t$  (16)  $f(t) * \text{Sa}(2t)$

3.17 利用傅里叶变换的对称性, 求下列信号的傅里叶逆变换。

(1)  $F(j\omega) = \cos\left(4\omega + \frac{\pi}{3}\right)$  (2)  $F(j\omega) = U(\omega+4) - U(\omega-4)$

(3)  $F(j\omega) = 2[\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)] + 3[\delta(\omega+2\pi) + \delta(\omega-2\pi)]$

3.18 利用傅里叶变换的性质, 求下列信号的傅里叶逆变换。

(1)  $F(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+2)^2}$  (2)  $F(j\omega) = -\frac{2}{\omega^2}$  (3)  $F(j\omega) = 6\pi\delta(\omega) - \frac{5}{\omega^2 - j\omega + 6}$

(4)  $F(j\omega) = \frac{\sin[3(\omega-2\pi)]}{\omega-2\pi}$  (5)  $F(j\omega) = \omega^2$  (6)  $F(j\omega) = \delta(\omega-3)$

(7)  $F(j\omega) = [U(\omega) - U(\omega-2)]e^{-j2\omega}$  (8)  $F(j\omega) = \text{Sa}(\omega) \sum_{k=0}^n e^{-j2k\omega}$  (9)  $F(j\omega) = e^{2\omega}U(-\omega)$

3.19 利用傅里叶变换的性质, 求下列信号的傅里叶变换。

(1)  $f(t) = -\frac{1}{\pi t^2}$  (2)  $f(t) = \frac{d}{dt}\delta(t) + 2\delta(3-2t)$

(3)  $f(t) = (1 + \cos \pi t)g_2(t)$  (4)  $f(t) = t^n$  (5)  $f(t) = 1/t$

3.20 由微积分性质求图 3-58 所示信号的傅里叶变换。你还能用其他方法求解吗?

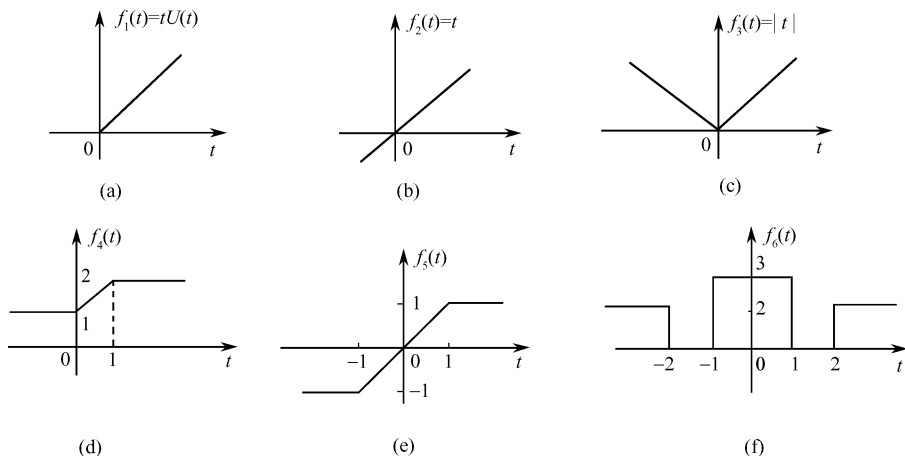


图 3-58

3.21\* 由调制定理求图 3-59 所示信号的傅里叶变换, 并粗略画出幅度谱。

3.22 求下列信号的卷积  $f_1(t) * f_2(t)$ 。

(1)  $f_1(t) = 4e^{-4t}U(t)$ ,  $f_2(t) = te^{-2t}U(t)$  (2)  $f_1(t) = te^{-4t}U(t)$ ,  $f_2(t) = 4te^{-2t}U(t)$

(3)  $f_1(t) = 2e^{-t}U(t)$ ,  $f_2(t) = e^tU(-t)$

3.23 已知信号  $f(t)$  的幅度谱和相位谱分别如图 3-60 所示, 求  $f(t)$  并画出波形。

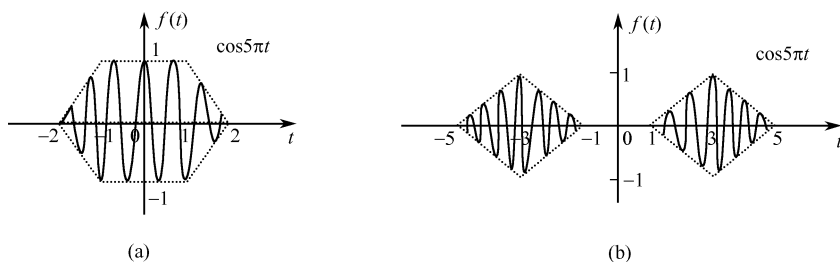


图 3-59

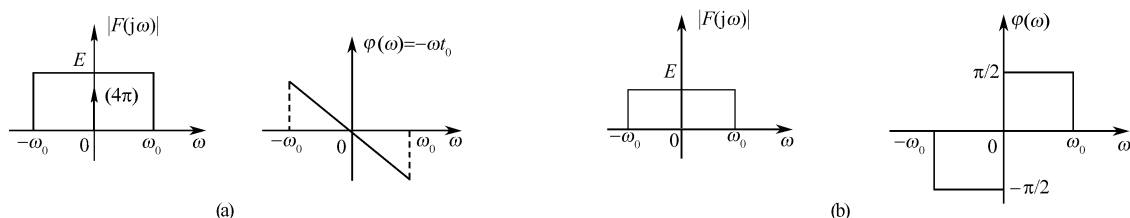


图 3-60

3.24\* 已知信号  $f_0(t)$  如图 3-61(a) 所示, 由  $f_0(t)$  做周期性的延拓得  $f(t)$ , 如图 3-61(b) 所示。试用傅里叶变换法求  $f(t)$  的傅里叶级数, 即先求  $f_0(t)$  的  $F(j\omega)$ , 再由  $F(j\omega)$  求  $f(t)$  的  $F_n(jn\omega_0)$ 。

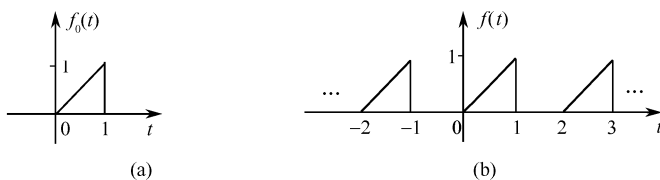


图 3-61

3.25 已知 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = f(t)$$

- (1) 求系统的频率响应  $H(j\omega)$  和冲激响应  $h(t)$ ;
- (2) 若激励  $f(t) = e^{-2t}U(t)$ , 求系统的零状态响应  $y_f(t)$ 。

3.26 已知 LTI 系统的输入信号  $f(t) = \sin 6\pi t + \cos 2\pi t$ , 当系统的单位冲激响应分别为 (1)  $h_1(t) = \text{Sa}(4\pi t)$ , (2)  $h_2(t) = 32\text{Sa}(4\pi t) \cdot \text{Sa}(8\pi t)$  时, 求其输出  $y(t)$ 。

3.27 已知 LTI 系统的频率响应  $H(j\omega)$  如图 3-62 所示, 其相频特性  $\varphi(\omega) = 0$ 。求当输入  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\pi/2} e^{jn\omega_0 t}$ , 其中  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$  时的输出  $y(t)$ 。

3.28\* 已知 LTI 系统的频率响应  $H(j\omega)$  如图 3-63(a) 所示, 其相频特性  $\varphi(\omega) = 0$ 。求当输入  $f(t)$  为如图 3-63(b) 所示的周期方波信号时, 系统的响应  $y(t)$ ; 若要使输出保留输入的 5 个频率分量, 则系统带宽应为多少?

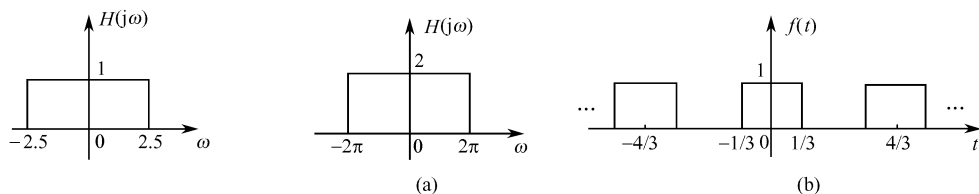


图 3-62

图 3-63

3.29 求下列系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

(1)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ ,  $f(t) = -2e^{-t}U(t)$ ,  $y(0^-) = 1, y'(0^-) = 2$

(2)  $y'(t) + 2y(t) = f(t)$ ,  $f(t) = \sin 2tU(t)$ ,  $y(0^-) = 1$

(3)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ ,  $f(t) = e^{-t}U(t)$ ,  $y(0^-) = y'(0^-) = 1$

3.30 已知基带信号  $f_1(t)$  带限于  $\omega_1$ , 信号  $f_2(t)$  带限于  $\omega_2$ , 求对下列信号进行理想抽样时, 所允许的最大抽样间隔  $T$ 。

(1)  $f_1(t) \cdot f_2(t)$  (2)  $f_1(t) + f_2(t)$  (3)  $f_1(t) * f_2(t)$  (4)  $f_1^2(t)$  (5)  $f_1(3t)$  (6)  $f_1(-t-5)f_1(t)$

3.31 确定下列信号的奈奎斯特间隔。

(1)  $\text{Sa}(50t)$  (2)  $[\text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(40t)]^5$  (3)  $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(80t)$

3.32\* 图 3-64(a) 所示系统对输入带限信号  $f(t)$  进行理想抽样,  $f(t)$  的频谱如图(b)所示。求:

(1)  $f_s(t)$  的时域和频域表达式(用  $f(t)$  和  $F(j\omega)$  表示), 并画出其频谱波形;

(2)  $f_{s1}(t)$  的时域和频域表达式(用  $f(t)$  和  $F(j\omega)$  表示), 并画出其频谱波形;

(3) 要从  $f_{s1}(t)$  中恢复  $f(t)$ , 理想滤波器的频率特性  $H(j\omega)$ 。

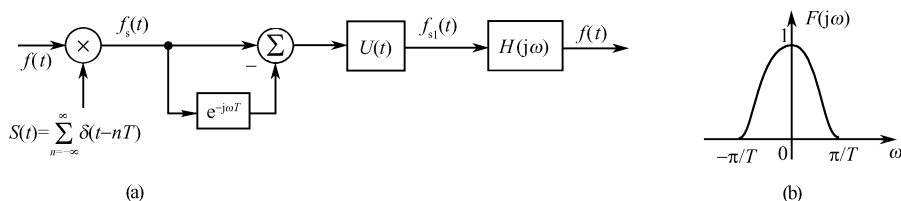


图 3-64

3.33\* 如图 3-65 所示电路, 以  $u(t)$  为输出求系统的传输函数  $H(j\omega)$ ; 欲使系统无失真传输信号,  $R_1, R_2$  应为何值?

3.34\* 如图 3-66 所示电路, 求系统的传输函数  $H(j\omega)$ , 求系统无失真传输信号的条件。

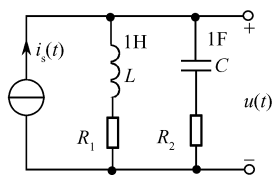


图 3-65

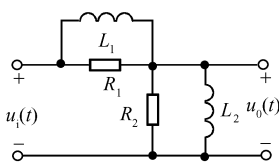


图 3-66

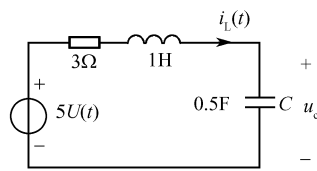


图 3-67

3.35 如图 3-67 所示电路, 初始条件  $i_L(0^-) = 2A, u_C(0^-) = 2V$ , 求电流  $i_L(t)$ 。

3.36 利用能量定理求下列积分的值。

(1)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$  (2)  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^4(2t) dt$

3.37 信号  $f(t)$  如图 3-68 所示, 设其频谱函数为  $F(j\omega)$ , 求下列各值。(注: 不求  $F(j\omega)$ )

(1)  $F(0)$  (2)  $\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega$  (3)  $\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$

3.38 已知系统微分方程和激励信号如下, 求系统的稳态响应。

(1)  $y'(t) + 1.5y(t) = f'(t)$ ,  $f(t) = \cos 2t$ ;

(2)  $y'(t) + 2y(t) = -f'(t) + 2f(t)$ ,  $f(t) = \cos 2t + 3$ ;

3.39\* 已知某理想高通滤波器的频率特性如图 3-69 所示, 求其冲激响应。

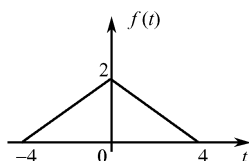


图 3-68

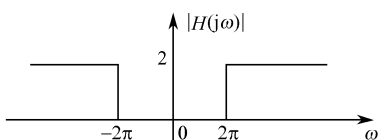
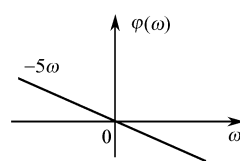


图 3-69



3.40\* 一个线性时不变系统的频率响应如图 3-70 所示,若输入  $f(t) = \frac{\sin 3t}{t} \cos 5t$ ,求  $y(t)$ 。

3.41\* 如图 3-71 所示系统,已知  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ ;  $s(t) = \cos t$ ;

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{3}\omega}, & |\omega| < 1.5 \text{ rad/s} \\ 0, & |\omega| > 1.5 \text{ rad/s} \end{cases} \text{。求系统响应 } y(t) \text{。}$$

3.42\* 如图 3-72 所示系统,已知  $f(t) = \frac{\sin 2t}{\pi t}$ ,  $H(j\omega) = j \operatorname{sgn}(\omega)$ ,求输出  $y(t)$ 。

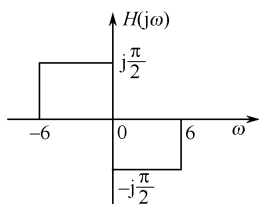


图 3-70

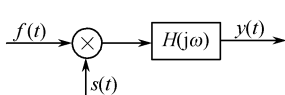


图 3-71

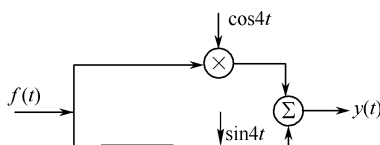


图 3-72

## 上机练习

3.1 求图 3-53 所示三角波的傅里叶级数,利用 MATLAB;

(1) 画出其双边幅度谱和相位谱;

(2) 若记  $\hat{f}(t) = \sum_{n=-N}^N F_n e^{jn\omega_0 t}$ ,画出  $N = 3, 5, 9$  时的波形图。

3.2 设  $f(t) = e^{-2|t|}$ 。求  $f(t)$ ,  $f(t-2)$  的傅里叶变换,分别画出其幅度谱和相位谱。

3.3 用 freqs 画出下列系统的幅频特性,并确定其是否具有低通、高通或带通特性。

$$(1) H(j\omega) = \frac{4}{(j\omega)^3 + 4(j\omega) + 8j\omega + 8} \quad (2) y''(t) + \sqrt{2}y'(t) + y(t) = f''(t)$$

3.4 信号  $f_1(t)$  如图 3-73 所示。

(1) 画出  $f(t) = f_1(t) \cos 50t$  的波形;

(2) 某系统的频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{10^4}{(j\omega)^4 + 2.6131(j\omega)^3 + 3.4142 \times 10^2(j\omega)^2 + 2.6131 \times 10^3(j\omega) + 10^4}$$

画出  $H(j\omega)$  的幅频特性和相频特性;

(3) 将  $f(t)$  通过上述系统,画出  $f(t)$  和输出信号的幅度谱;

(4) 画出输出信号的波形。

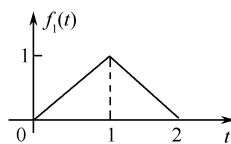


图 3-73

# 第 4 章 连续时间信号与系统的复频域分析

## 内 容 提 要

本章引入复频率  $s = \sigma + j\omega$ , 以复指数信号  $e^{st}$  为基本信号, 可以将信号分解为许多不同复频率的复指数分量之叠加(积分), 从而系统的零状态响应是输入信号各分量引起的响应的叠加(积分)——拉普拉斯逆变换。若考虑到系统的初始状态, 则系统的零输入响应和零状态响应可同时求得, 从而得到系统的全响应。此外, 系统函数  $H(s)$  是复频域( $s$  域)分析中的一个重要内容, 本章将在研究系统函数的零极点分布与系统时域、频域特性关系的基础上, 讨论系统的稳定性等问题。拉普拉斯变换有单边与双边之分, 本章主要讨论单边拉普拉斯变换, 适当兼顾双边拉普拉斯变换的相关内容。

## 4.1 拉普拉斯变换

第 3 章中, 傅里叶分析采用将信号分解为复正弦分量的叠加来研究信号和 LTI 系统的表示。傅里叶分析在涉及信号与系统的谐波分析、频率响应、波形失真和频谱搬移等方面都能给出物理意义十分清楚的结果, 它在信号分析与处理方面是极为有用的, 但傅里叶分析法也存在一定的局限性, 对于非绝对可积的信号, 由于其傅里叶变换或者不存在(如信号  $e^{2t}U(t)$ ), 或者变换式中含有冲激或冲激的导数(如信号  $U(t)$  和  $tU(t)$ ), 使变换式的形式和运算都较为复杂, 并不适合采用傅里叶分析。另外, 在系统分析方面, 由于傅里叶变换不包含初始状态, 当系统具有初始状态时, 若采用傅里叶分析, 全响应的计算会比较烦琐。

拉普拉斯变换(Laplace transform, 以下简称拉氏变换)可以看做连续时间信号傅里叶变换的推广, 它是基于复指数信号  $e^{st}$  的, 能够为连续时间 LTI 系统及其与信号的相互作用提供比傅里叶方法更为广泛的特性描述。比如, 拉氏变换能够用于分析一大类涉及非绝对可积信号的问题, 诸如非稳定系统的冲激响应等。

拉氏变换分为两类:(1)单边拉氏变换;(2)双边拉氏变换。单边拉氏变换是求解具有初始条件的微分方程的方便工具, 也非常适合对因果 LTI 系统进行瞬态分析和稳态分析。双边拉氏变换则适合讨论系统的特性(如稳定性、因果性及频率响应等)。本书主要讨论单边拉氏变换。在引入单边拉氏变换之前, 先对双边拉氏变换做一简单介绍。除非特别说明, 书中的拉氏变换均指单边拉氏变换。

### 4.1.1 双边拉普拉斯变换

由第 3 章可知, 当函数  $f(t)$  满足狄里赫利条件时, 其傅里叶变换为

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4-1)$$

为了导出信号  $f(t)$  的双边拉普拉斯变换的定义, 先来考虑  $e^{-\sigma t} f(t)$  ( $\sigma$  为一实常数) 的傅里叶变换。由式(4-1), 可得

$$\mathcal{F}[e^{-\sigma t} f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = F(\sigma + j\omega) \quad (4-2)$$

其中, 实常数  $\sigma$  的选择应使得  $e^{-\sigma t} f(t)$  绝对可积。

令  $s = \sigma + j\omega$ , 则式(4-2)变为

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4-3)$$

式(4-3)称为信号  $f(t)$  的双边拉普拉斯变换, 简称双边拉氏变换,  $F(s)$  称为“象函数”。实际上,  $f(t)$  的双边拉氏变换就是  $e^{-\sigma t} f(t)$  的傅里叶变换, 并将结果写为复变量  $s = \sigma + j\omega$  的函数。

为了找出由  $F(s)$  求  $f(t)$  的一般表达式, 先由傅里叶逆变换表达式求  $e^{-\sigma t} f(t)$ :

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4-4)$$

用  $e^{\sigma t}$  乘以式(4-4)的两边, 可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

因为  $s = \sigma + j\omega$ , 所以  $ds = d\sigma + jd\omega$ , 若  $\sigma$  为某选定的实常数, 则有  $d\omega = \frac{1}{j} ds$ , 且当  $\omega \rightarrow \pm \infty$  时,  $s \rightarrow \sigma \pm j\infty$ , 于是

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (4-5)$$

这就是  $F(s)$  的双边拉普拉斯逆变换, 简称双边拉氏逆变换, 由此可以得到  $f(t)$ 。在式(4-5)中,  $f(t)$  通常称为“原函数”。

这样, 式(4-3)和式(4-5)就构成一对双边拉氏变换对。已知  $f(t)$  可由式(4-3)求得其双边拉氏变换  $F(s)$ ; 反之, 利用式(4-5)由  $F(s)$  求得其双边拉氏逆变换  $f(t)$ 。常用记号  $\mathcal{L}[f(t)]$  表示取双边拉氏变换。用记号  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$  表示取双边拉氏逆变换。于是式(4-3)和式(4-5)可分别写为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds \end{aligned}$$

类似于傅里叶变换,  $f(t)$  与  $F(s)$  的关系通常简记为  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ , 其含义是:  $f(t)$  的双边拉氏变换为  $F(s)$ , 而  $F(s)$  的双边拉氏逆变换为  $f(t)$ , 分别由式(4-3)和式(4-5)求出。

#### 4.1.2 双边拉普拉斯变换的收敛域

由前面的讨论可知, 只有式(4-3)中的积分收敛, 信号  $f(t)$  的双边拉氏变换  $F(s)$  才存在。这说明, 一个信号的双边拉氏变换由代数表达式和该表达式能成立的变量  $s$  值的范围共同确定。一般把使式(4-3)积分收敛的  $s$  值的范围称为拉氏变换的收敛域 (Region of Convergence), 简记为 ROC。也就是说, ROC 是由这样一些  $s = \sigma + j\omega$  组成的, 对这些  $s$  来说,  $e^{-\sigma t} f(t)$  的傅里叶变换收敛。为进一步讨论 ROC, 下面先介绍零、极点的概念。

##### 1. $s$ 平面与零、极点

借助复平面 (又称为  $s$  平面), 可以方便地从图形上表示复频率  $s$ 。如图 4-1 所示, 水平



轴代表  $s$  的实部, 记为  $\text{Re}[s]$  或  $\sigma$ , 垂直轴代表  $s$  的虚部, 记为  $\text{Im}[s]$  或  $j\omega$ , 水平轴与垂直轴通常分别称为  $\sigma$  轴与  $j\omega$  轴。如果信号  $f(t)$  绝对可积, 则可从双边拉氏变换中得到傅里叶变换:

$$F(j\omega) = F(s) \big|_{\sigma=0} \quad \text{或等价写为} \quad F(j\omega) = F(s) \big|_{s=j\omega}$$

在  $s$  平面上,  $\sigma = 0$  对应于虚轴, 因此, 通过沿虚轴对双边拉氏变换求值便可得到傅里叶变换。

$j\omega$  轴把  $s$  平面分为两半。 $j\omega$  轴左边区域称为左半平面,  $j\omega$  轴右边区域称为右半平面。在左半平面上,  $s$  的实部为负, 在右半平面上,  $s$  的实部为正。

在工程上最常遇到的拉氏变换的形式是有理分式, 即  $F(s)$  为两个多项式之比, 称为有理拉氏变换。其一般表达式可写为

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} \quad (4-6)$$

将分子与分母分别进行因式分解后,  $F(s)$  可写为

$$F(s) = \frac{b_m \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)} \quad (4-7)$$

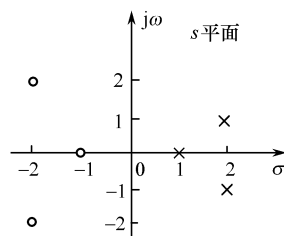


图 4-1  $s$  平面

式中,  $z_k$  是分子多项式的根, 称为  $F(s)$  的零点;  $p_k$  是分母多项式的根, 称为  $F(s)$  的极点。在  $s$  平面上, 用符号“ $\circ$ ”表示零点的位置, 用符号“ $\times$ ”表示极点的位置, 如图 4-1 所示。该图称为  $F(s)$  的零极点图。水平轴为  $\text{Re}[s]$ , 垂直轴为  $\text{Im}[s]$ ;  $s = -1$  与  $s = -2 \pm j2$  代表零点,  $s = 1$  与  $s = 2 \pm j$  代表极点。显然, 除了常数  $b_m$ ,  $F(s)$  由  $s$  平面上的零、极点位置唯一确定。

## 2. 收敛域的特性

为了进一步说明双边拉氏变换收敛域的一般规律和特征, 下面先来研究几个典型信号的拉氏变换。

**【例 4-1】** 确定因果指数信号  $f(t) = e^{-at}U(t)$  ( $a > 0$ , 实数) 的双边拉氏变换及其收敛域, 并画出零极点图。

解: 将  $f(t)$  代入式(4-3), 得

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}U(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t} \bigg|_0^{\infty}$$

为求  $e^{-(s+a)t}$  的极限, 利用  $s = \sigma + j\omega$ , 得到

$$e^{-(s+a)t} \bigg|_0^{\infty} = e^{-(\sigma+a)t} \cdot e^{-j\omega t} \bigg|_0^{\infty}$$

若  $\sigma > -a$ , 则当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e^{-(\sigma+a)t} \rightarrow 0$ , 有

$$F(s) = -\frac{1}{s+a}(0-1) = \frac{1}{s+a}, \quad \sigma > -a$$

若  $\sigma \leq -a$ , 则  $F(s)$  不存在, 因为积分不收敛。因此, 该信号双边拉氏变换的 ROC 是  $\sigma > -a$ , 或者等效为  $\text{Re}[s] > -a$ 。图 4-2 的阴影部分代表 ROC, 极点位于  $s = -a$  处。

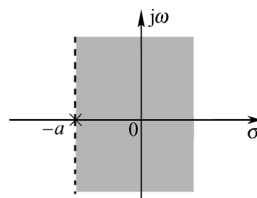


图 4-2 例 4-1 的收敛域和零极点图

【例 4-2】 确定反因果指数信号  $f(t) = -e^{-at}U(-t)$  ( $a > 0$ , 实数) 的双边拉氏变换及其 ROC, 并画出零极点图。

解: 将  $f(t)$  代入式(4-3), 得

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}U(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t}dt \\ &= \frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}[s] < -a \end{aligned}$$

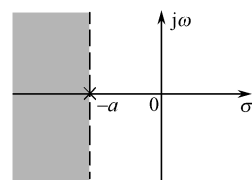


图 4-3 例 4-2 的收敛域和零极点图

其 ROC 及零极点图如图 4-3 所示。

由以上两个例子可见, 两个很不相同的信号, 其双边拉氏变换的代数表达式是完全相同的, 仅仅是 ROC 不同。这说明 ROC 是双边拉氏变换的重要组成部分。在给出一个信号的双边拉氏变换时, 应同时给出其代数表达式和 ROC。

【例 4-3】 确定双边指数信号  $f(t) = e^{-a|t|}$  ( $a > 0$ , 实数) 的双边拉氏变换及其 ROC, 画出零极点图。

解: 由双边拉氏变换的定义式, 可得

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-st}dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(s-a)t}dt + \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt \\ &= -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{-1}{s+a}e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

上式中第一项的极限仅当  $\text{Re}[s] < a$  时存在, 而第二项的极限仅当  $\text{Re}[s] > -a$  时存在。因此, 仅当  $-a < \text{Re}[s] < a$  时, 上式中的拉氏变换才存在。此时

$$\begin{aligned} F(s) &= -\frac{1}{s-a}(1-0) - \frac{1}{s+a}(0-1) \\ &= \frac{-2a}{s^2 - a^2}, \quad -a < \text{Re}[s] < a \end{aligned}$$

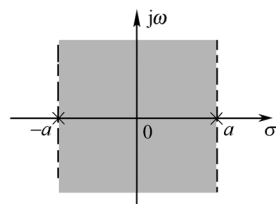


图 4-4 例 4-3 的收敛域和零极点图

其收敛域及零极点图如图 4-4 所示, 显然, 若  $a < 0$ , 则  $f(t)$  的拉氏变换不存在。

结合上述例子, 将信号的双边拉氏变换  $F(s)$  的 ROC 的特性总结如下:

(1)  $F(s)$  的 ROC 是  $s$  平面内平行于  $j\omega$  轴的某一区域。ROC 中不含任何极点, 极点位于 ROC 的边界上或其他区域, 换言之,  $F(s)$  是其 ROC 中的解析函数。

(2) 如果  $f(t)$  是右边信号, 则  $F(s)$  的 ROC 是某条直线  $\text{Re}[s] = \sigma_1$  的右边; 又若  $F(s)$  是有理变换, 则其 ROC 在  $s$  平面上位于最右边极点的右边。

(3) 如果  $f(t)$  是左边信号, 则  $F(s)$  的 ROC 位于某条直线  $\text{Re}[s] = \sigma_2$  的左边; 又若  $F(s)$  是有理变换, 则其 ROC 在  $s$  平面上位于最左边极点的左边。

(4) 如果  $f(t)$  是双边信号, 则  $F(s)$  的 ROC 是  $s$  平面上位于直线  $\text{Re}[s] = \sigma_1$  和直线  $\text{Re}[s] = \sigma_2$  之间的带状区域。

(5) 如果  $f(t)$  是时限信号, 且绝对可积, 则其 ROC 是整个  $s$  平面。

上述特性此处不做证明, 所涉及的右边信号、左边信号、双边信号和时限信号的示例如图 4-5 所示。

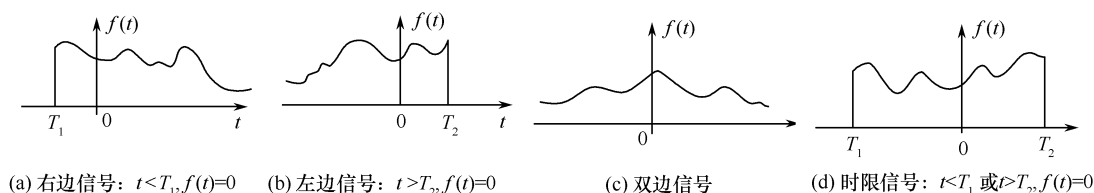


图 4-5 右边信号、左边信号、双边信号和时限信号的示例

### 4.1.3 单边拉普拉斯变换

在实际应用中,大多数情况下仅仅涉及因果信号和因果系统,即  $t < 0$  时输入信号和输出信号均为零。为此定义信号的单边拉普拉斯变换如下:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4-8)$$

积分下限从  $0^-$  开始是考虑到信号  $f(t)$  在  $t=0$  处可能包含有冲激或不连续点,一般情况下我们仍将积分下限写为  $0$ ,只在必要时(即  $f(t)$  在  $t=0$  处含有冲激或不连续时)才将其写为  $0^-$ 。 $F(s)$  的逆变换仍由式(4-5)表示,只是把  $t$  的范围限定为  $t \geq 0$ ,即

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds, & t \geq 0 \end{cases} \quad (4-9)$$

这样式(4-8)和式(4-9)就构成了单边拉氏变换对。这里仍然用  $\mathcal{L}[f(t)]$  表示取正变换,用  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$  表示取逆变换。 $F(s)$  和  $f(t)$  仍然分别称为象函数与原函数。 $f(t)$  与  $F(s)$  的关系仍然简记为  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ 。从本节开始,我们将单边拉氏变换简称为拉氏变换,除非特别指明,所涉及的拉氏变换均指单边拉氏变换。

由式(4-8)可知,如果  $f(t)$  是因果信号,则其单边拉氏变换与双边拉氏变换相同。因此,单边拉氏变换的 ROC 与因果信号双边拉氏变换的 ROC 具有相同的特征,即都是  $s$  平面上某一条直线  $\text{Re}[s] = \sigma_0$  的右边,若变换是有理的,则 ROC 位于最右边极点的右边。也就是说,由单边拉氏变换的表达式即可唯一确定其 ROC。故在讨论单边拉氏变换时,可以不标出 ROC。

### 4.1.4 常用信号的拉普拉斯变换

#### 1. 单位阶跃信号 $U(t)$

$$\mathcal{L}[U(t)] = \int_0^{\infty} U(t) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}[s] > 0$$

所以

$$U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s} \quad (4-10)$$

#### 2. 单边指数信号 $e^{at}U(t)$ ( $a$ 为任意常数)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}U(t)] &= \int_0^{\infty} e^{at}U(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad \text{Re}[s] > \text{Re}[a] \end{aligned}$$

所以 
$$e^{at}U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-a} \quad (4-11)$$

### 3. 单位冲激信号 $\delta(t)$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

所以 
$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (4-12)$$

表 4-1 列出了一些常用信号的拉氏变换。

表 4-1 一些常用信号的拉氏变换

序号	$f(t) \quad (t>0)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	序号	$f(t) \quad (t>0)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1	冲激 $\delta(t)$	1	7	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
2	阶跃 $U(t)$	$\frac{1}{s}$	8	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
3	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	9	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
4	$t^n \quad (n \text{ 是正整数})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$t^n e^{-at} \quad (n \text{ 是正整数})$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	11	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	12	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

## 4.2 单边拉普拉斯变换的性质

拉氏变换的性质与傅里叶变换相似。在下面的讨论中,我们假设

$$f(t) \longleftrightarrow F(s), \quad f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s), \quad f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)$$

### 4.2.1 线性特性

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (4-13)$$

式中  $a_1, a_2$  为常数。拉氏变换的线性特性是根据其作为积分的定义,以及积分是一种线性运算而得到的,证明如下。

$$\begin{aligned}
 \text{证明:} \quad \mathcal{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_0^{\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{\infty} a_1 f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} a_2 f_2(t) e^{-st} dt \\
 &= a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)
 \end{aligned}$$

一般来说,两个信号相叠加后,象函数的 ROC 至少是原来两个 ROC 的重叠部分,若发生零极点相抵消的情况,则  $a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$  的 ROC 有可能扩大。

【例 4-4】 求单边余弦信号  $\cos\omega_0 t U(t)$  和单边正弦信号  $\sin\omega_0 t U(t)$  的拉氏变换。

解:由欧拉公式  $\cos\omega_0 t U(t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) U(t)$

而 
$$e^{j\omega_0 t} U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s - j\omega_0}, \quad e^{-j\omega_0 t} U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s + j\omega_0}$$

故由线性特性 
$$\cos\omega_0 t U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (4-14)$$

类似地,由 
$$\sin\omega_0 t U(t) = \frac{1}{j2}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) U(t)$$

可得 
$$\sin\omega_0 t U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j2} \left( \frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad (4-15)$$

## 4.2.2 时移特性

$$f(t - t_0) U(t - t_0) \longleftrightarrow F(s) e^{-s t_0}, \quad t_0 \text{ 为常数} \quad (4-16)$$

证明: 
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - t_0) U(t - t_0)] &= \int_0^\infty [f(t - t_0) U(t - t_0)] e^{-s t} dt \\ &= \int_{t_0}^\infty f(t - t_0) e^{-s t} dt \end{aligned}$$

令  $\tau = t - t_0$ , 则  $t = \tau + t_0$ , 代入上式, 得

$$\mathcal{L}[f(t - t_0) U(t - t_0)] = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s t_0} \cdot e^{-s \tau} d\tau = e^{-s t_0} \cdot F(s)$$

因为单边变换仅根据信号的非负时间部分来定义, 因此, 时移应仅涉及信号的非负时间部分, 即  $f(t) U(t)$ ; 并且  $t_0$  应限制为不使信号的  $t \geq 0$  的非零部分移入  $t < 0$  的区域。

【例 4-5】 求图 4-6 所示的矩形脉冲的象函数。

解: 
$$f(t) = U(t) - U(t - \tau)$$

因为 
$$U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \quad U(t - \tau) \longleftrightarrow \frac{1}{s} e^{-s \tau}$$

所以 
$$f(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s} (1 - e^{-s \tau})$$

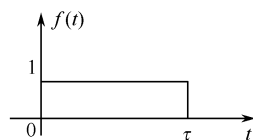


图 4-6 例 4-5 的图

本例中  $\mathcal{L}[U(t)]$  和  $\mathcal{L}[U(t - \tau)]$  的 ROC 均为  $\text{Re}[s] > 0$ , 极点均在  $s = 0$  处。但  $\frac{1}{s}(1 - e^{-s \tau})$  有一个  $s = 0$  的零点, 抵消了该处的极点, 相应地 ROC 扩大为整个  $s$  平面。事实上,  $f(t)$  为一时限信号, 因而其 ROC 应为整个  $s$  平面。

【例 4-6】 求图 4-7 所示的  $t = 0$  时接入的周期单位冲激序列的象函数  $F(s)$ 。

解:  $f(t)$  的表达式为

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \\ &= \delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) + \cdots + \delta(t - nT) + \cdots \end{aligned}$$

因为  $\delta(t) \longleftrightarrow 1, \quad \delta(t - T) \longleftrightarrow e^{-sT}, \quad \cdots, \quad \delta(t - nT) \longleftrightarrow e^{-s nT}, \quad \cdots$

所以 
$$F(s) = 1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots + e^{-s nT} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-sT})^n$$

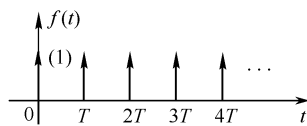


图 4-7 例 4-6 的图

$F(s)$  是一个公比为  $e^{-sT}$  的无穷多项等比数列之和, 当  $\operatorname{Re}[s] > 0$  时,  $|e^{-sT}| < 1$ , 该数列收敛, 由等比数列求和公式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-sT})^n = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-sT}} \quad (4-17)$$

### 4.2.3 复频移(s域平移)特性

$$f(t)e^{s_0 t} \longleftrightarrow F(s - s_0), \quad s_0 \text{ 为任意常数} \quad (4-18)$$

证明:  $\mathcal{L}[f(t)e^{s_0 t}] = \int_0^{\infty} f(t)e^{s_0 t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-s_0)t} dt = F(s - s_0)$

此性质表明, 时间信号乘以  $e^{s_0 t}$ , 相当于变换式在  $s$  域内平移  $s_0$ 。

【例 4-7】求  $e^{-at} \cos \omega_0 t U(t)$  及  $e^{-at} \sin \omega_0 t U(t)$  的象函数。

解: 因为  $\cos \omega_0 t U(t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \sin \omega_0 t U(t) \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$

由  $s$  域平移特性, 有  $e^{-at} \cos \omega_0 t U(t) \longleftrightarrow \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$

和  $e^{-at} \sin \omega_0 t U(t) \longleftrightarrow \frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$

### 4.2.4 尺度变换(时-复频展缩)特性

$$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0 \quad (4-19)$$

证明:  $\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt$

令  $at = \tau$ , 则  $t = \frac{\tau}{a}$ ,  $dt = \frac{1}{a} d\tau$ , 代入上式得

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

一般地  $f(at - t_0) U(at - t_0) \longleftrightarrow \frac{1}{a} e^{-\frac{s}{a}t_0} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0, t_0 > 0$

【例 4-8】求  $U(at)$ ,  $a > 0$  的拉氏变换, 并由此说明  $U(at) = U(t)$ 。

解: 令  $F(s) = \mathcal{L}[U(t)]$ , 则  $F(s) = 1/s$ , 由尺度变换特性

$$\mathcal{L}[U(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{s/a} = \frac{1}{s}$$

因为  $\mathcal{L}[U(at)] = \mathcal{L}[U(t)]$

所以  $U(at) = U(t)$

### 4.2.5 卷积定理

类似于傅里叶变换的卷积定理, 在拉氏变换中也有时域卷积定理与复频域卷积定理, 时域卷积定理在系统分析中更为重要。

## 1. 时域卷积定理

若  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  为因果信号, 即对  $t < 0, f_1(t) = f_2(t) = 0$ , 则

$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s) F_2(s) \quad (4-20)$$

证明: 因为对  $t < 0, f_1(t) = f_2(t) = 0$ , 所以

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t - \lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t - \lambda) d\lambda$$

于是 
$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t - \lambda) d\lambda \right] e^{-st} dt$$

交换积分次序, 得 
$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^{\infty} f_1(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} f_2(t - \lambda) e^{-st} dt$$

注意到  $\lambda > 0$ , 令  $t - \lambda = \tau$ , 则

$$\int_0^{\infty} f_2(t - \lambda) e^{-st} dt = \int_{-\lambda}^{\infty} f_2(\tau) e^{-s\tau} \cdot e^{-s\lambda} d\tau = \int_0^{\infty} f_2(\tau) e^{-s\tau} \cdot e^{-s\lambda} d\tau = F_2(s) e^{-s\lambda}$$

代入上式, 得 
$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \left[ \int_0^{\infty} f_1(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \right] F_2(s) = F_1(s) F_2(s)$$

即 
$$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s) F_2(s)$$

**【例 4-9】** 求图 4-8 所示的自  $t=0$  接入的周期性矩形脉冲信号  $f(t)$  的拉氏变换。

解:  $f(t)$  在第一个周期内 ( $0 \leq t < T$ ) 的表达式为

$$f_1(t) = E[U(t) - U(t - \tau)]$$

于是可得 
$$f(t) = f_1(t) * \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

由卷积定理 
$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] \cdot \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)\right]$$

由  $f_1(t)$  的表达式及例 4-6 可知

$$\mathcal{L}[f_1(t)] = E(1 - e^{-s\tau})/s, \quad \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)\right] = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

所以 
$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{E(1 - e^{-s\tau})}{s(1 - e^{-sT})}$$

上述例子可以推广至一般情形: 设自  $t=0$  接入的周期信号  $f(t)$  在第一个周期内 ( $0 \leq t < T$ ) 的表达式为  $f_1(t)$ , 且  $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)$ , 则  $f(t)$  的拉氏变换可表示为

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}} \quad (4-21)$$

## 2. 复频域卷积定理

用类似方法可以证明

$$f_1(t) f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F_1(\lambda) F_2(s - \lambda) d\lambda \quad (4-22)$$

式中积分路线  $\sigma = C$  是  $F_1(\lambda)$  和  $F_2(s - \lambda)$  收敛域重叠部分内与虚轴平行的直线。这里对积分路线的限制较严, 而该积分的计算也比较复杂, 因而复频域卷积定理较少应用。

复频域卷积定理此处不做证明。

## 4.2.6 微分定理

### 1. 时域微分

$$\left. \begin{aligned} f'(t) &\longleftrightarrow sF(s) - f(0^-) \\ f''(t) &\longleftrightarrow s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-) \\ f^{(n)}(t) &\longleftrightarrow s^nF(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-1-m}f^{(m)}(0^-) \end{aligned} \right\} \quad (4-23)$$

证明:根据拉氏变换的定义

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt$$

对上式运用分部积分,得

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{\infty} f'(t)e^{-st} dt &= e^{-st}f(t) \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}f(t) - f(0^-) + sF(s) \end{aligned}$$

在收敛域内有  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st}f(t) = 0$ , 故

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-) \quad (4-24)$$

反复应用式(4-24)可推广至高阶导数的情形。例如二阶导数

$$f''(t) = \frac{d}{dt}[f'(t)]$$

应用式(4-24)得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0^-) \\ &= s[sF(s) - f(0^-)] - f'(0^-) \\ &= s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-) \end{aligned} \quad (4-25)$$

类似地,可得  $n$  阶导数的拉氏变换

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-) \\ &= s^nF(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-1-m}f^{(m)}(0^-) \end{aligned}$$

特别地,对因果信号,有

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow s^nF(s) \quad (4-26)$$

**【例 4-10】** 信号  $f(t)$  如图 4-9 所示,分别通过直接计算和微分特性求  $\frac{df(t)}{dt}$  的拉氏变换。

**解:**由图 4-9 可得  $\frac{df(t)}{dt} = -e^{-t}U(t)$

所以  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = -\frac{1}{s+1}$

下面用微分特性重推此结果。

记  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ , 则  $F(s) = \frac{1}{s+1}$ 。

由微分特性  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-) = \frac{s}{s+1} - 1 = -\frac{1}{s+1}$

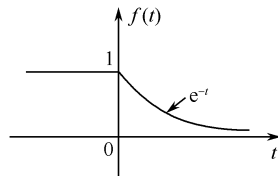


图 4-9 例 4-10 的图



## 2. 复频域微分(s域微分)

$$\left. \begin{aligned} -tf(t) &\longleftrightarrow \frac{dF(s)}{ds} \\ (-t)^n f(t) &\longleftrightarrow \frac{d^n F(s)}{ds^n} \end{aligned} \right\} \quad (4-27)$$

推广至一般情形

证明:因为

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

上式两边对  $s$  求导,得

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

交换微分与积分次序,得

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{ds} [e^{-st}] dt = \int_0^{\infty} -tf(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[-tf(t)]$$

即

$$-tf(t) \longleftrightarrow \frac{dF(s)}{ds}$$

重复运用上述结果可得

$$(-t)^n f(t) \longleftrightarrow \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

【例 4-11】求  $tU(t)$  和  $t^n U(t)$  的拉氏变换。

解:因为

$$U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$$

由复频域微分特性,得

$$-tU(t) \longleftrightarrow \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{-1}{s^2}$$

即

$$tU(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad (4-28)$$

同理

$$t^2 U(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s^2} \right) = \frac{2}{s^3}$$

$$t^3 U(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds} \left( \frac{2}{s^3} \right) = \frac{3!}{s^4}$$

$\vdots$

$$t^n U(t) \longleftrightarrow -\frac{d}{ds} \left( \frac{(n-1)!}{s^n} \right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

所以

$$t^n U(t) \longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (4-29)$$

## 4.2.7 积分定理

### 1. 时域积分

用符号  $f^{(-n)}(t)$  表示对函数  $f(t)$  的  $n$  重积分,它也可表示为  $\left( \int_{-\infty}^t \right)^n f(x) dx$ ,如果该积分的下

限为  $0^-$ ,就表示为  $\left( \int_{0^-}^t \right)^n f(x) dx$ 。则积分特性为

$$\left( \int_{0^-}^t f(x) dx \right) \longleftrightarrow \frac{1}{s^n} F(s) \quad (4-30)$$

否则,积分特性为

$$\left. \begin{aligned} f^{(-1)}(t) &= \int_{-\infty}^t f(x) dx \longleftrightarrow \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0^-) \\ f^{(-n)}(t) &= \left( \int_{-\infty}^t \right)^n f(x) dx \longleftrightarrow \frac{1}{s^n} F(s) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{s^{n-m+1}} f^{(-m)}(0^-) \end{aligned} \right\} \quad (4-31)$$

首先证明式(4-30)。令  $n=1$ , 因为

$$\int_{0^-}^t f(x) dx = [f(t)U(t)] * U(t)$$

$$\text{所以} \quad \mathcal{L} \left[ \int_{0^-}^t f(x) dx \right] = \mathcal{L} [f(t)U(t)] \mathcal{L} [U(t)] = \frac{1}{s} F(s) \quad (4-32)$$

重复应用上述结果即可得式(4-30)。

其次,再来研究式(4-31)。先证明  $n=1$  的情形,此时有

$$\begin{aligned} f^{(-1)}(t) &= \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^{0^-} f(x) dx + \int_{0^-}^t f(x) dx \\ &= f^{(-1)}(0^-) + \int_{0^-}^t f(x) dx \end{aligned} \quad (4-33)$$

式中,  $f^{(-1)}(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} f(x) dx$ , 它是  $f^{(-1)}(t)$  在  $t=0^-$  时的值, 它是一个常数。由于是取单边变换, 故

$$\mathcal{L} [f^{(-1)}(0^-)] = \frac{1}{s} f^{(-1)}(0^-) \quad (4-34)$$

对式(4-33)两边取拉氏变换并将式(4-32)、式(4-34)代入, 得

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f^{(-1)}(t)] &= \mathcal{L} [f^{(-1)}(0^-)] + \mathcal{L} \left[ \int_{0^-}^t f(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{s} f^{(-1)}(0^-) + \frac{1}{s} F(s) \end{aligned} \quad (4-35)$$

反复利用式(4-35)即可得到式(4-31)。

**【例 4-12】** 利用积分定理求图 4-10 所示三角形脉冲的拉氏变换  $F(s)$ 。

**解:** 设  $f_2(t) = f''(t)$ , 则

$$f_2(t) = 2\delta(t) - 4\delta(t-1) + 2\delta(t-2)$$

且

$$f(t) = \left( \int_{0^-}^t \right)^2 f_2(x) dx$$

设  $F_2(s) = \mathcal{L} [f_2(t)]$ , 则

$$F_2(s) = 2(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})$$

由时域积分特性

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2} F_2(s) = \frac{2}{s^2} (1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) \\ &= \frac{2(1 - e^{-s})^2}{s^2} \end{aligned}$$

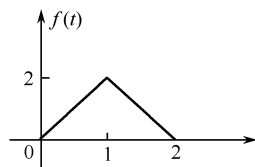


图 4-10 例 4-12 的图

## 2. 复频域积分

$$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^\infty F(\lambda) d\lambda \quad (4-36)$$

证明:将  $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$  代入  $\int_s^\infty F(\lambda) d\lambda$  中并交换积分次序,得

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(\lambda) d\lambda &= \int_s^\infty \left[ \int_0^\infty f(t) e^{-\lambda t} dt \right] d\lambda = \int_0^\infty f(t) \left[ \int_s^\infty e^{-\lambda t} d\lambda \right] dt \\ &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right]\end{aligned}$$

【例 4-13】求  $\text{Sa}(t)U(t)$  的象函数。

解:因为  $\text{sint}U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{t^2 + 1}$

所以  $\text{Sa}(t)U(t) = \frac{\text{sint}U(t)}{t} \longleftrightarrow \int_s^\infty \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\lambda = \tan^{-1}\lambda \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \text{arccots } s$

即  $\text{Sa}(t)U(t) \longleftrightarrow \text{arccots } s$

## 4.2.8 初值定理和终值定理

### 1. 初值定理

记  $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ , 若  $f(t)$  不包含  $\delta(t)$  及其各阶导数, 则

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (4-37)$$

证明:由时域微分特性可知

$$f'(t) \longleftrightarrow sF(s) - f(0^-) \quad (4-38)$$

另一方面 
$$\int_{0^-}^\infty f'(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} f'(t) e^{-st} dt + \int_{0^+}^\infty f'(t) e^{-st} dt \quad (4-39)$$

考虑到在  $(0^-, 0^+)$  区间  $e^{-st} = 1$ , 故

$$\int_{0^-}^{0^+} f'(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} f'(t) dt = f(0^+) - f(0^-)$$

将上式代入式(4-39), 得

$$\int_{0^-}^\infty f'(t) e^{-st} dt = f(0^+) - f(0^-) + \int_{0^+}^\infty f'(t) e^{-st} dt \quad (4-40)$$

式(4-38)与式(4-40)应该相等, 于是有

$$sF(s) - f(0^-) = f(0^+) - f(0^-) + \int_{0^+}^\infty f'(t) e^{-st} dt$$

即 
$$sF(s) = f(0^+) + \int_{0^+}^\infty f'(t) e^{-st} dt \quad (4-41)$$

对上式两边取  $s \rightarrow \infty$  的极限, 考虑到  $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ , 得

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+) + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^+}^\infty f'(t) e^{-st} dt = f(0^+) + \int_{0^+}^\infty f'(t) \left[ \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st} \right] dt = f(0^+)$$

### 2. 终值定理

若信号  $f(t)$  当  $t \rightarrow \infty$  时的极限存在, 即  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在, 则

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (4-42)$$

证明:对式(4-41)两边取  $s \rightarrow 0$  的极限, 由于

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} f'(t) \left[ \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} \right] dt = \int_{0^+}^{\infty} f'(t) dt = f(\infty) - f(0^+)$$

所以  $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(0^+) + \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^+}^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = f(0^+) + f(\infty) - f(0^+) = f(\infty)$

即式(4-42)成立。

在系统分析中,有时我们仅对输出信号的初始值  $y(0^+)$  和终值  $y(\infty)$  感兴趣。在许多情况下,初值定理和终值定理允许我们直接从拉氏变换求出初始值和终值,这样,就可以避免拉氏逆变换的计算。需要注意的是,初值定理和终值定理仅对单边拉氏变换或因果信号成立。另外,在应用终值定理时,  $sF(s)$  的全部极点应在  $s$  平面的左半平面,否则不能应用。

**【例 4-14】** 信号  $f(t)$  的拉氏变换  $F(s) = \frac{1}{s+a}$ , 求原信号  $f(t)$  的初值和终值。

**解:** (1) 由初值定理  $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s+a} = 1$

(2) 因为  $sF(s) = \frac{s}{s+a}$  在  $s = -a$  处有一个极点,故若  $a=0$ ,  $sF(s)$  无极点,若  $a>0$ ,  $sF(s)$  的极点在左半平面,这两种情况下终值均存在;若  $a<0$ , 则  $sF(s)$  的极点在右半平面,终值不存在。

$$\text{因此} \quad f(\infty) = \begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+a} = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ 1, & a = 0 \end{cases} \\ \text{不存在,} & a < 0 \end{cases}$$

事实上,  $f(t) = e^{-at} U(t)$ , 由此很容易得出上述结果。

表 4-2 列出了单边拉氏变换的性质,以便查阅。

表 4-2 单边拉普拉斯变换的性质

名 称	时域	$f(t) \longleftrightarrow F(s)$	复频域
定 义	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$	$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad \sigma > \sigma_0$	
线性特性	$a_1 f_1(t) \pm a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) \pm a_2 F_2(s), \quad \sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$	
时频展缩特性	$f(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \sigma > a\sigma_0$	
时移特性	$f(t-t_0) U(t-t_0)$	$e^{-st_0} F(s), \quad \sigma > \sigma_0$	
	$f(at-b) U(at-b), \quad a > 0, \quad b \geq 0$	$\frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}s} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \sigma > a\sigma_0$	
复频移特性	$e^{\pm sa} f(t)$	$F(s \mp s_a), \quad \sigma > \sigma_a + \sigma_0$	
时域微分	$f^{(1)}(t)$	$sF(s) - f(0^-), \quad \sigma > \sigma_0$	
	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-1-m} f^{(m)}(0^-)$	
时域积分	$\left( \int_{0^-}^t f(x) dx \right)$	$\frac{1}{s^n} F(s), \quad \sigma > \max(\sigma_0, 0)$	
	$f^{(-1)}(t)$	$\frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0^-)$	
	$f^{(-n)}(t)$	$\frac{1}{s^n} F(s) + \sum_{m=1}^n \frac{1}{s^{n-m+1}} f^{(-m)}(0^-)$	

续表

名 称	时域	$f(t) \longleftrightarrow F(s)$	复频域
时域卷积	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) F_2(s), \sigma > \max(\sigma_1, \sigma_2)$	
时域相乘	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2 \pi j} \int_{C-j \infty}^{C+j \infty} F_1(\eta) F_2(s-\eta) d \eta$ $\sigma > \sigma_1 + \sigma_2, \sigma_1 < C < \sigma - \sigma_2$	
复频域微分	$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s), \sigma > \sigma_0$	
复频域积分	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(\eta) d \eta, \sigma > \sigma_0$	
初值定理	$f\left(0^{+}\right)=\lim _{s \rightarrow \infty} s F(s), \quad F(s)$ 为真分式		
终值定理	$f(\infty)=\lim _{s \rightarrow 0} s F(s), \quad s=0$ 在收敛域内		
注:①表中 $\sigma_0$ 为收敛坐标; ② $f^{(n)}(t) \stackrel{\text { def }}{=} \frac{d^n f(t)}{d t^n}, \quad F^{(n)}(s) \stackrel{\text { def }}{=} \frac{d^n F(s)}{d s^n}, \quad f^{(-n)}(t)=\left(\int_{-\infty}^t\right)^n f(x) d x, n \geqslant 0$			

### 4.3 拉普拉斯逆变换

在系统分析中,为了最终求得系统的时域响应,常要求象函数的拉氏逆变换。直接利用式(4-9)计算逆变换需要复变函数理论和围线积分的知识,这已超出了本书的范围。实际上,常常遇到的象函数是有理函数,对于这种情况,通过部分分式展开,将  $F(s)$  表示为各个部分分式之和便可得到逆变换,无须进行积分运算。下面我们就讨论通过部分分式展开求有理函数逆变换的方法。假设

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

式中,  $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0, b_m, \cdots, b_0$  皆为实数,  $m$  和  $n$  为正整数。

如果  $F(s)$  是非标准有理函数(即  $m \geq n$ ), 则用长除法把  $F(s)$  表示为以下形式

$$F(s) = \sum_{k=0}^{m-n} C_k s^k + F_1(s) \tag{4-43}$$

式中  $F_1(s) = \frac{N_1(s)}{D(s)}$  (注意,若  $m < n$ , 则  $C_k = 0, F_1(s) = F(s)$ )

此时分子多项式  $N_1(s)$  的阶数低于分母多项式的阶数(即为真分式), 可以用部分分式展开法确定  $F_1(s)$  的逆变换。而对于式(4-43)中的第一项, 利用  $\delta(t) \longleftrightarrow 1$  及时域微分特性, 可以

找出  $\sum_{k=0}^{m-n} C_k s^k$  中各项的逆变换为

$$\sum_{k=0}^{m-n} C_k \delta^{(k)}(t) \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{m-n} C_k s^k \tag{4-44}$$

其中,  $\delta^{(k)}(t)$  表示冲激函数  $\delta(t)$  的第  $k$  阶导数。

因此, 下面仅需讨论真分式  $F_1(s)$  的部分分式展开。为此, 将分母进行因式分解, 把  $F_1(s)$  表示为

$$F_1(s) = \frac{N_1(s)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)}, \quad \text{其中 } p_k (k = 1, 2, \dots, n) \text{ 为极点}$$

按照极点的不同特点,部分分式展开有以下几种情况。

### 4.3.1 极点为实数且无重根

设  $p_1, p_2, \dots, p_n$  为  $F_1(s)$  的互不相同的实极点,则  $F_1(s)$  可分解为以下部分分式之和

$$F_1(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \dots + \frac{A_n}{s - p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - p_k} \quad (4-45)$$

和式中各项的拉氏逆变换可以由下式得到

$$A_k e^{p_k t} U(t) \longleftrightarrow \frac{A_k}{s - p_k}$$

从而可得到  $F_1(s)$  的逆变换。

为了确定式(4-45)中第  $k$  个系数  $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ , 将式(4-45)两边乘以  $(s - p_k)$  并令  $s = p_k$ , 则有

$$A_k = (s - p_k) F_1(s) \Big|_{s=p_k} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4-46)$$

【例 4-15】 设  $F(s) = \frac{-5s-7}{(s+1)(s-1)(s+2)}$ , 求其逆变换。

解: 对  $F(s)$  进行部分分式展开

$$F(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s-1} + \frac{A_3}{s+2}$$

由式(4-46)可得  $A_1 = (s+1)F(s) \Big|_{s=-1} = \frac{-5 \times (-1) - 7}{(-1-1) \times (-1+2)} = 1$

$$A_2 = (s-1)F(s) \Big|_{s=1} = \frac{-5 \times 1 - 7}{(1+1) \times (1+2)} = -2$$

$$A_3 = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{-5 \times (-2) - 7}{(-2+1) \times (-2-1)} = 1$$

于是

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+2}$$

故

$$f(t) = e^{-t}U(t) - 2e^tU(t) + e^{-2t}U(t)$$

【例 4-16】 求  $F(s) = \frac{s^3+7s^2+18s+20}{s^2+5s+6}$  的拉氏逆变换  $f(t)$ 。

解:  $F(s)$  不是真分式, 首先用长除法将  $F(s)$  表示为真分式与  $s$  的多项式之和

$$\begin{array}{r} s+2 \\ s^2+5s+6 \overline{) s^3+7s^2+18s+20} \\ \underline{s^3+5s^2+6s} \phantom{+20} \\ 2s^2+12s+20 \\ \underline{2s^2+10s+12} \\ 2s+8 \end{array}$$

得到 
$$F(s) = s + 2 + \frac{2s + 8}{s^2 + 5s + 6}$$

将第三项有理真分式进行部分分式展开,得

$$\frac{2s + 8}{s^2 + 5s + 6} = \frac{A_1}{s + 2} + \frac{A_2}{s + 3}$$

其中

$$A_1 = (s + 2) \frac{2s + 8}{s^2 + 5s + 6} \Big|_{s=-2} = \frac{2 \times (-2) + 8}{(-2) + 3} = 4$$

$$A_2 = (s + 3) \frac{2s + 8}{s^2 + 5s + 6} \Big|_{s=-3} = \frac{2 \times (-3) + 8}{-3 + 2} = -2$$

所以

$$F(s) = s + 2 + \frac{4}{s + 2} - \frac{2}{s + 3}$$

从而

$$f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + 4e^{-2t}U(t) - 2e^{-3t}U(t)$$

### 4.3.2 极点为复数且无重根

如果  $D(s) = 0$  有复根,由于  $D(s)$  是实系数的,因此复根是成共轭对出现的,即  $F_1(s)$  有共轭复数极点。此时仍可由式(4-46)计算各展开系数,但计算要麻烦一些。根据共轭复数的特点可以采取以下方法。

不妨设  $F_1(s)$  的共轭极点为  $-\alpha \pm j\beta$ ,则  $F_1(s)$  可表示为

$$F_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s) [(s + \alpha)^2 + \beta^2]} = \frac{N_1(s)}{D_1(s) (s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}$$

记

$$F_2(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

则

$$F_1(s) = \frac{F_2(s)}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}$$

于是  $F_1(s)$  可展开为

$$F_1(s) = \frac{A_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{A_2}{s + \alpha + j\beta} + \cdots \quad (4-47)$$

由式(4-46)求得

$$A_1 = (s + \alpha - j\beta) F_1(s) \Big|_{s = -\alpha + j\beta} = \frac{F_2(-\alpha + j\beta)}{j2\beta}$$

$$A_2 = (s + \alpha + j\beta) F_1(s) \Big|_{s = -\alpha - j\beta} = \frac{F_2(-\alpha - j\beta)}{-j2\beta}$$

由于  $F_2(s)$  是实系数的,故不难看出  $A_1$  与  $A_2$  呈共轭关系,假定

$$A_1 = |A_1| e^{j\theta}$$

则

$$A_2 = A_1^* = |A_1| e^{-j\theta}$$

如果把式(4-47)中共轭复数极点有关部分的逆变换以  $f_0(t)$  表示,则

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A_1}{s + \alpha - j\beta} + \frac{A_2}{s + \alpha + j\beta} \right] \\ &= |A_1| e^{j\theta} e^{(-\alpha + j\beta)t} U(t) + |A_1| e^{-j\theta} e^{(-\alpha - j\beta)t} U(t) \\ &= 2 |A_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) U(t) \end{aligned} \quad (4-48)$$

【例 4-17】 求  $F(s) = \frac{3s^2 + 22s + 27}{s^4 + 5s^3 + 13s^2 + 19s + 10}$  的拉氏逆变换。

解: 
$$F(s) = \frac{3s^2 + 22s + 27}{s^4 + 5s^3 + 13s^2 + 19s + 10} = \frac{3s^2 + 22s + 27}{(s+1)(s+2)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$= \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+1-j2} + \frac{A_3^*}{s+1+j2}$$

$$A_1 = (s+1)F(s) \Big|_{s=-1} = \frac{3 \times (-1)^2 + 22 \times (-1) + 27}{[(-1)+2] \times [(-1)^2 + 2 \times (-1) + 5]} = 2$$

$$A_2 = (s+2)F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{3 \times (-2)^2 + 22 \times (-2) + 27}{(-2+1) \times [(-2)^2 + 2 \times (-2) + 5]} = 1$$

$$A_3 = (s+1-j2) \Big|_{s=-1+j2} = \frac{3 \times (-1+j2)^2 + 22 \times (-1-j2) + 27}{(-1+j2+1) \times (-1+j2+2) \times (-1+j2+1+j2)}$$

$$= -1.5 - j1 = \frac{\sqrt{13}}{2} e^{j(\pi + \arctan \frac{2}{3})}$$

利用式(4-48)可得  $f(t) = \left[ 2e^{-t} + e^{-2t} - \sqrt{13}e^{-t} \cos\left(2t + \arctan \frac{2}{3}\right) \right] U(t)$

在变换式含有复数极点时,也可在展开式中将共轭极点组合成具有实系数的二次项,以避免复数运算,我们通过下面的例子说明这种方法。

【例 4-18】 求  $F(s) = \frac{4s^2 + 6}{s^3 + s^2 - 2}$  的拉氏逆变换。

解: 
$$F(s) = \frac{4s^2 + 6}{(s-1)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{4s^2 + 6}{(s-1)[(s+1)^2 + 1]}$$

复数共轭极点为  $s = -1 \pm j$ , 可以将  $F(s)$  展开为

$$F(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B_1s + B_2}{(s+1)^2 + 1}$$

其中 
$$A = (s-1)F(s) \Big|_{s=1} = \frac{4s^2 + 6}{(s+1)^2 + 1} \Big|_{s=1} = 2$$

于是 
$$F(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{B_1s + B_2}{(s+1)^2 + 1}$$

将上式通分后,令其分子与  $F(s)$  的分子相等,便可求出  $B_1$  与  $B_2$ 。于是可得

$$4s^2 + 6 = 2[(s+1)^2 + 1] + (B_1s + B_2)(s-1)$$

$$= (2 + B_1)s^2 + (4 - B_1 + B_2)s + (4 - B_2)$$

由  $s^2$  系数相等得出  $B_1 = 2$ , 由常数项相等得出  $B_2 = -2$ , 因此

$$F(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{2s-2}{(s+1)^2 + 1} = \frac{2}{s-1} + \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 1} - 4 \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

于是 
$$f(t) = (2e^t + 2e^{-t} \cos t - 4e^{-t} \sin t) U(t)$$

### 4.3.3 极点为多重极点

如果分母多项式  $D(s) = 0$  含有多重根,不失一般性,设  $p_1$  为  $r$  重根,而其余的为单根。此时  $F_1(s)$  可表示为

$$F_1(s) = \frac{N_1(s)}{(s-p_1)^r D_1(s)}$$

可以将  $F_1(s)$  按如下形式做部分分式展开



$$F_1(s) = \frac{A_{11}}{(s-p_1)^r} + \frac{A_{12}}{(s-p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_{1r}}{s-p_1} + \cdots \quad (4-49)$$

即存在  $r$  个关于该极点的部分分式展开式, 且相应的展开式系数  $A_{1k}$  可由下式求得

$$A_{1k} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [(s-p_1)^r F_1(s)] \Big|_{s=p_1} \quad (4-50)$$

利用式(4-29)及复频移特性求各项的逆变换, 得到

$$\frac{At^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_1 t} U(t) \longleftrightarrow \frac{A}{(s-p_1)^n} \quad (4-51)$$

【例 4-19】求  $F(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}$  的拉氏逆变换。

解: 对  $F(s)$  进行部分分式展开

$$F(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_{21}}{(s+2)^2} + \frac{A_{22}}{s+2}$$

由式(4-46)及式(4-50)求得

$$A_1 = (s+1)F(s) \Big|_{s=-1} = \frac{3s+4}{(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = \frac{3 \times (-1) + 4}{(-1+2)^2} = 1$$

$$A_{21} = (s+2)^2 F(s) \Big|_{s=-2} = \frac{3s+4}{s+1} \Big|_{s=-2} = \frac{3 \times (-2) + 4}{-2+1} = 2$$

$$A_{22} = \frac{d}{ds} [(s+2)^2 F(s)] \Big|_{s=-2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{3s+4}{s+1} \right) \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = -1$$

所以

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+2}$$

从而得

$$f(t) = (e^{-t} + 2te^{-2t} - e^{-2t}) U(t)$$

【例 4-20】求  $F(s) = \frac{[1 - e^{-(s+1)}]^2}{(s+1)[1 - e^{-2(s+1)}]}$  的原函数  $f(t)$ 。

解: 令  $F_1(s) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2s}}$

则

$$F(s) = F_1(s+1)$$

令

$$F_2(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s}, \quad F_3(s) = \frac{1}{1 - e^{-2s}}$$

则

$$F_1(s) = F_2(s)F_3(s)$$

设  $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(s)$ ,  $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(s)$ ,  $f_3(t) \longleftrightarrow F_3(s)$ , 由复频移特性和时域卷积定理可得

$$f(t) = e^{-t} f_1(t) = e^{-t} [f_2(t) * f_3(t)]$$

$$F_2(s) \text{ 的原函数为 } f_2(t) = U(t) - 2U(t-1) + U(t-2)$$

$f_2(t)$  的波形如图 4-11(a) 所示。

$F_3(s)$  的原函数是周期为 2 的有始冲激序列, 即

$$f_3(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-2n)$$

由时域卷积定理  $f_1(t) = f_2(t) * f_3(t)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [U(t-2n) - 2U(t-2n-1) + U(t-2n-2)]$$

$f_1(t)$  的波形如图 4-11(b) 所示。

最后由复频移特性得

$$f(t) = e^{-t} f_1(t) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} [U(t-2n) - 2U(t-2n-1) + U(t-2n-2)]$$

$f(t)$  的波形如图 4-11(c) 所示。

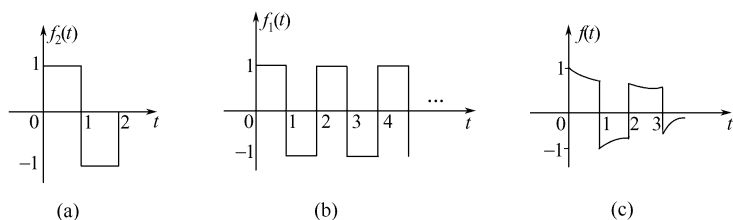


图 4-11 例 4-20 的图

## 4.4 连续时间系统的复频域分析

拉氏变换是分析线性时不变连续系统的有力工具。一方面它可以将描述系统的时域微积分方程变换为复频域的代数方程,便于运算和求解。在这个变换过程中,由于它可以将系统的初始状态自然地包含在复频域的代数方程中,所以既可以分别求得零输入响应和零状态响应,也可一举求得系统的全响应。另一方面,对于具体的电路网络,首先建立电路元件和电路网络的复频域模型,在此基础上可以编写关于响应的象函数的代数方程,由此求得响应的象函数,最后经拉氏逆变换求得响应。

### 4.4.1 微分方程的拉普拉斯变换求解

单边拉氏变换在系统分析中的重要应用之一是求解由线性常系数微分方程描述的因果 LTI 连续系统在输入为因果信号时的响应,尤其当微分方程带有非零初始条件时,用单边拉氏变换求解更为方便。

设因果 LTI 连续系统的微分方程为

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) \\ &= b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0f(t) \end{aligned} \quad (4-52)$$

设系统的初始状态为  $y(0^-)$ ,  $y'(0^-)$ ,  $\cdots$ ,  $y^{(n-1)}(0^-)$ , 且  $f(t)$  为因果信号。根据时域微分定理,  $y(t)$  及其导数的拉氏变换为 (设  $y(t) \longleftrightarrow Y(s)$ )

$$\mathcal{L}[y^{(i)}(t)] = s^i Y(s) - \sum_{l=0}^{i-1} s^{i-1-l} y^{(l)}(0^-), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n \quad (4-53)$$

而  $f(t)$  为因果信号, 故  $f^{(j)}(0^-) = 0, j = 0, 1, 2, \cdots, m$ , 从而  $f(t)$  及其各阶导数的拉氏变换为 (假设  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ )

$$\mathcal{L}[f^{(j)}(t)] = s^j F(s) \quad (4-54)$$

对式(4-52)两边取拉氏变换并将式(4-53), 式(4-54)代入, 得

$$\sum_{i=0}^n a_i [s^i Y(s) - \sum_{l=0}^{i-1} s^{i-1-l} y^{(l)}(0^-)] = \sum_{j=0}^m b_j s^j F(s), \quad a_n = 1$$

$$\text{即} \quad \left( \sum_{i=0}^n a_i s^i \right) Y(s) - \sum_{i=0}^n a_i \left[ \sum_{l=0}^{i-1} s^{i-1-l} y^{(l)}(0^-) \right] = \left( \sum_{j=0}^m b_j s^j \right) F(s) \quad (4-55)$$

$$\text{由上式可解得} \quad Y(s) = \frac{M(s)}{D(s)} + \frac{N(s)}{D(s)} F(s) \quad (4-56)$$

其中  $D(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$  仅与式(4-52) 左边  $y(t)$  及其各阶导数的系数  $a_i$  有关;  $N(s) = \sum_{j=0}^m b_j s^j$  仅与式(4-52) 右边  $f(t)$  及其各阶导数的系数  $b_j$  有关;  $M(s) = \sum_{i=0}^n a_i \left[ \sum_{l=0}^{i-1} s^{i-1-l} y^{(l)}(0^-) \right]$  也是  $s$  的多项式, 且其系数仅与  $a_i$  及响应的各初始状态  $y^{(l)}(0^-)$  ( $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) 有关而与激励无关。

由式(4-56)可以看出, 其第一项仅与初始状态及系统方程有关而与输入信号无关, 因此它是系统的零输入响应  $y_x(t)$  的象函数, 将其记为  $Y_x(s)$ ; 第二项仅与输入信号及系统方程有关而与初始状态无关, 因而是零状态响应  $y_f(t)$  的象函数, 将其记为  $Y_f(s)$ 。于是式(4-56)可写成

$$Y(s) = Y_x(s) + Y_f(s) = \frac{M(s)}{D(s)} + \frac{N(s)}{D(s)} F(s) \quad (4-57)$$

$$\text{其中} \quad Y_x(s) = \frac{M(s)}{D(s)}, \quad Y_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)} F(s)$$

取式(4-57)的逆变换, 得系统的全响应

$$y(t) = y_x(t) + y_f(t) \quad (4-58)$$

**【例 4-21】** 某因果系统由微分方程  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$  描述, 初始条件是  $y(0^-) = 2$  和  $y'(0^-) = -12$ , 输入信号  $f(t) = U(t)$ , 求系统的响应  $y(t)$ 。

**解:** 设  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ ,  $y(t) \longleftrightarrow Y(s)$ , 则  $F(s) = 1/s$ 。利用时域微分定理和线性特性, 取微分方程两边的拉氏变换, 得

$$s^2 Y(s) - s y(0^-) - y'(0^-) + 5[s Y(s) - y(0^-)] + 6Y(s) = F(s)$$

将  $F(s)$  和初始条件代入上式并合并, 可以得到

$$(s^2 + 5s + 6) Y(s) = (2s^2 - 2s + 1)/s$$

解得

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 2s + 1}{s(s^2 + 5s + 6)}$$

将  $Y(s)$  做部分分式展开

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{s+3}$$

其中

$$A_1 = sY(s) \Big|_{s=0} = \frac{2s^2 - 2s + 1}{s^2 + 5s + 6} \Big|_{s=0} = \frac{1}{6}$$

$$A_2 = (s+2)Y(s) \Big|_{s=-2} = \frac{2s^2 - 2s + 1}{s(s+3)} \Big|_{s=-2} = -\frac{13}{2}$$

$$A_3 = (s+3)Y(s) \Big|_{s=-3} = \frac{2s^2 - 2s + 1}{s(s+2)} \Big|_{s=-3} = \frac{25}{3}$$

所以

$$Y(s) = \frac{1/6}{s} - \frac{13}{2} \frac{1}{s+2} + \frac{25}{3} \frac{1}{s+3}$$

从而

$$y(t) = \left( \frac{1}{6} - \frac{13}{2} e^{-2t} + \frac{25}{3} e^{-3t} \right) U(t)$$

【例 4-22】 某因果系统的模拟框图如图 4-12 所示。已知  $f(t) = e^{-t}U(t)$ , 求系统的零状态响应  $y_f(t)$ 。

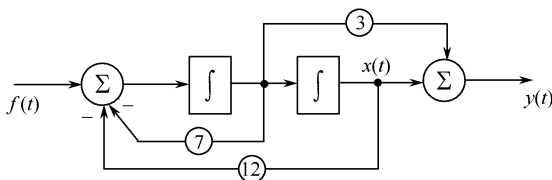


图 4-12 例 4-22 的图

解: 如图中所示, 设第二个积分器的输出信号为  $x(t)$ , 则两个加法器的输出方程为

$$x''(t) = f(t) - 7x'(t) - 12x(t) \quad (1)$$

$$y(t) = 3x'(t) + x(t) \quad (2)$$

设  $x(t) \longleftrightarrow X(s)$ ,  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ ,  $y(t) \longleftrightarrow Y_f(s)$ , 则在零状态条件下式①和式②的拉氏变换为

$$s^2 X(s) = F(s) - 7sX(s) - 12X(s) \quad (3)$$

$$Y_f(s) = 3sX(s) + X(s) \quad (4)$$

由式③和式④解得

$$Y_f(s) = \frac{3s+1}{s^2+7s+12} F(s) \quad (5)$$

而  $F(s) = \frac{1}{s+1}$ , 代入上式得

$$Y_f(s) = \frac{3s+1}{(s+1)(s^2+7s+12)}$$

作部分分式展开, 得

$$Y_f(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+3} + \frac{A_3}{s+4}$$

其中

$$A_1 = (s+1)Y_f(s) \Big|_{s=-1} = \frac{3s+1}{(s+3)(s+4)} \Big|_{s=-1} = -\frac{1}{3}$$

$$A_2 = (s+3)Y_f(s) \Big|_{s=-3} = \frac{3s+1}{(s+1)(s+4)} \Big|_{s=-3} = 4$$

$$A_3 = (s+4)Y_f(s) \Big|_{s=-4} = \frac{3s+1}{(s+1)(s+3)} \Big|_{s=-4} = -\frac{11}{3}$$

所以

$$Y_f(s) = -\frac{1}{3} \frac{1}{s+1} + 4 \frac{1}{s+3} - \frac{11}{3} \frac{1}{s+4}$$

从而

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = \left( -\frac{1}{3}e^{-t} + 4e^{-3t} - \frac{11}{3}e^{-4t} \right) U(t)$$

【例 4-23】 在例 4-22 中, 若  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = -2$ , 求系统的全响应。

解: 由例 4-22 中的式⑤可得系统的微分方程为

$$y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = 3f'(t) + f(t)$$

上式两边取拉氏变换并整理, 得

$$Y(s) = \frac{sy(0^-) + y'(0^-) + 7y(0^-)}{s^2+7s+12} + \frac{3s+1}{s^2+7s+12} F(s)$$

将  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = -2$  和  $F(s)$  代入, 得

$$Y(s) = \frac{s+5}{s^2+7s+12} + \frac{3s+1}{(s+1)(s^2+7s+12)}$$

其中第一项为零输入响应的象函数  $Y_x(s)$ , 第二项为例 4-22 中的零状态响应的象函数。  $Y_x(s)$  的部分分式展开为

$$Y_x(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+4}$$

因此零输入响应为  $y_x(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_x(s)] = (2e^{-3t} - e^{-4t})U(t)$

$y_f(t)$  如例 4-22 中所求, 于是全响应为

$$\begin{aligned} y(t) &= y_x(t) + y_f(t) = (2e^{-3t} - e^{-4t})U(t) + \left(-\frac{1}{3}e^{-t} + 4e^{-3t} - \frac{11}{3}e^{-4t}\right)U(t) \\ &= \left(-\frac{1}{3}e^{-t} + 6e^{-3t} - \frac{14}{3}e^{-4t}\right)U(t) \end{aligned}$$

#### 4.4.2 电路网络的复频域模型分析法

复频域模型(又叫  $s$  域模型)分析方法以电路的复频域模型为基础, 用类似分析正弦稳态电路的各种方法编写复频域的代数方程, 求解响应的象函数, 最后借助拉氏逆变换得到所需要的时域响应。

##### 1. 电路元件的复频域模型

对于线性时不变二端元件  $R, L, C$ , 若规定其端电压  $u(t)$  与电流  $i(t)$  为关联参考方向, 那么由拉氏变换的线性及微、积分性质可得到它们的复频域模型。

##### (1) 电阻元件

电阻  $R$  与相应的电压  $u_R(t)$  及电流  $i_R(t)$  满足关系

$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

对该式进行拉氏变换, 得到

$$U_R(s) = RI_R(s) \quad (4-59)$$

由式(4-59)可以得到如图 4-13(a)所示的电阻元件的复频域模型。

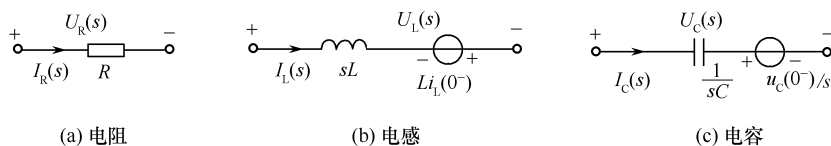


图 4-13  $R, L, C$  串联形式的复频域模型

##### (2) 电感元件

电感元件的电压、电流关系为

$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t)$$

求该式的拉氏变换并应用微分特性, 得到

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-) \quad (4-60)$$

由式(4-60)可以得到如图 4-13(b)所示的电感元件的复频域模型。

##### (3) 电容元件

电容元件的伏安关系为

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau$$

上式两边取拉氏变换并应用积分特性,得

$$U_c(s) = \frac{1}{sC} I_c(s) + \frac{u_c(0^-)}{s}, \quad u_c(0^-) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^-} i_c(\tau) d\tau \quad (4-61)$$

类似地,由式(4-61)表示的电容元件的复频域模型如图 4-13(c) 所示。

与式(4-60)和式(4-61)相对应的电感和电容的电路模型称为这两种元件串联形式的复频域模型,在用基尔霍夫电压定律求解电路时适合采用该模型。如果要使用基尔霍夫电流定律,则采用并联形式的复频域模型更为方便,它们可以通过将式(4-60)和式(4-61)中的电流表示为电压的函数得到

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{i_L(0^-)}{s} \quad (4-62)$$

$$I_c(s) = sCU_c(s) - Cu_c(0^-) \quad (4-63)$$

相应的电路模型如图 4-14 所示。

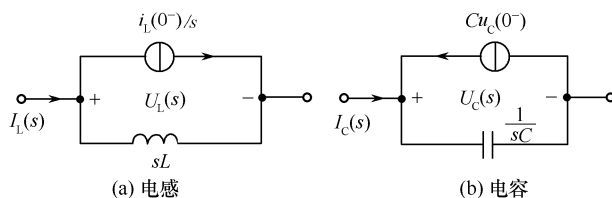


图 4-14 并联形式的电感与电容的复频域模型

表 4-3 列出了各电路元件的时域和复频域关系,以便查阅。

表 4-3 电路元件的复频域模型

		电 阻	电 感	电 容
基本 关系				
		$u_R(t) = Ri_R(t)$ $i_R(t) = \frac{1}{R}u_R(t)$	$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^t u_L(\tau) d\tau + i_L(0^-)$	$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i_c(\tau) d\tau + u_c(0^-)$ $i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt}$
复 频 域 模 型	串 联 形 式			
		$U_R(s) = RI_R(s)$	$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$	$U_c(s) = \frac{1}{sC}I_c(s) + \frac{u_c(0^-)}{s}$
	并 联 形 式			
		$I_R(s) = \frac{1}{R}U_R(s)$	$I_L(s) = \frac{1}{sL}U_L(s) + \frac{i_L(0^-)}{s}$	$I_c(s) = sCU_c(s) - Cu_c(0^-)$

## 2. 电路网络的复频域分析

应用复频域分析法求解电路系统的响应时,首先要画出电路的复频域模型,其次利用基尔霍夫电流、电压定律和电路的基本分析方法(如网孔分析法、节点分析法等)编写与响应象函数有关的代数方程,然后从方程解出响应的象函数,最后取拉氏逆变换求得时域响应。下面举例说明。

【例 4-24】 电路如图 4-15(a) 所示,已知  $1\text{F}$  电容的初始电压  $u_C(0^-) = 3\text{V}$ ,求  $i_C(t)$ ,  $t \geq 0$ 。

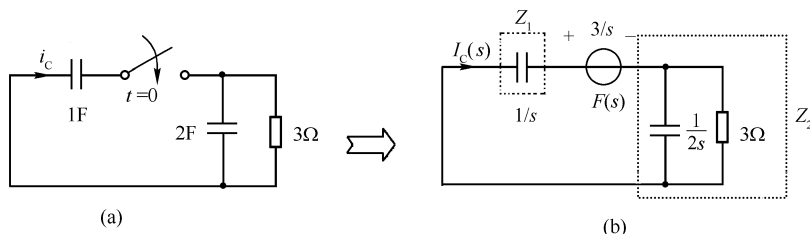


图 4-15 例 4-24 的图

解: 画出电路的复频域模型如图 4-15(b) 所示。由图可得

$$I_C(s) = -\frac{3/s}{Z_1 + Z_2} = -\frac{3/s}{\frac{1}{s} + \frac{1}{2s + 1/3}} = -2\left(1 + \frac{1/18}{s + 1/9}\right)$$

则 
$$i_C(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_C(s)] = -2[\delta(t) + \frac{1}{18}e^{-\frac{1}{9}t}U(t)]$$

【例 4-25】 如图 4-16(a) 所示电路,已知  $f_1(t) = 3e^{-t}U(t)$ ,  $f_2(t) = e^{-2t}U(t)$ ,求  $t \geq 0$  的零状态响应  $i_L(t)$ 。

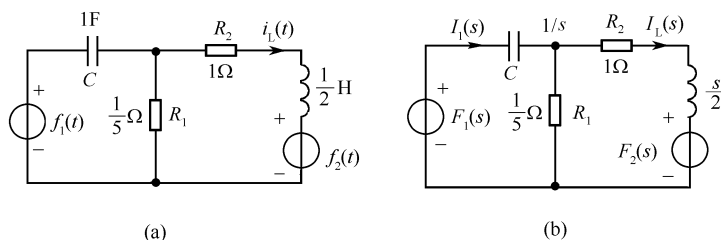


图 4-16 例 4-25 的图

解:(1) 画出电路的复频域模型如图 4-16(b) 所示。

(2) 复频域模型的网孔方程(网孔电流设为  $I_1(s)$  和  $I_L(s)$ ) 为

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{s}\right)I_1(s) - \frac{1}{5}I_L(s) &= F_1(s) \\ -\frac{1}{5}I_1(s) + \left(\frac{6}{5} + \frac{s}{2}\right)I_L(s) &= -F_2(s) \end{aligned}$$

(3) 解网孔方程得

$$I_L(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{s} & F_1(s) \\ -\frac{1}{5} & -F_2(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{5} + \frac{1}{s} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} + \frac{s}{2} \end{vmatrix}} = \frac{2sF_1(s) - 2(s+5)F_2(s)}{s^2 + 7s + 12}$$

将  $F_1(s) = \frac{3}{s+1}$ ,  $F_2(s) = \frac{1}{s+2}$  代入并整理, 得

$$I_L(s) = \frac{4s^2 - 10}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

(4) 用部分分式展开  $I_L(s)$ , 即

$$I_L(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{-3}{s+2} + \frac{13}{s+3} + \frac{-9}{s+4}$$

于是  $i_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_L(s)] = (-e^{-t} - 3e^{-2t} + 13e^{-3t} - 9e^{-4t})U(t)$

**【例 4-26】** 如图 4-17(a) 所示电路, 已知  $u_s = 12\text{V}$ ,  $L = 1\text{H}$ ,  $C = 1\text{F}$ ,  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 1\Omega$ , 原电路已处于稳态, 当  $t = 0$  时, 开关 S 闭合, 求 S 闭合后  $R_3$  两端电压的零输入和零状态响应。

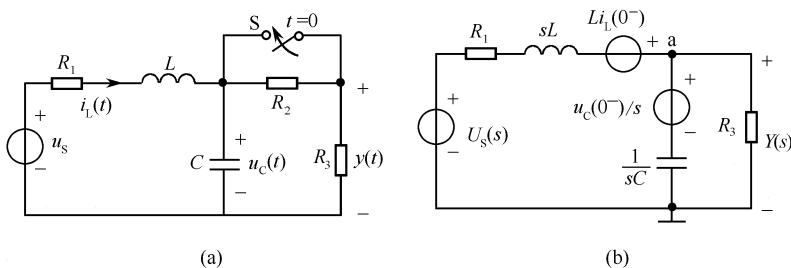


图 4-17 例 4-26 的图

**解:** 首先求出电容电压和电感电流的初始值  $u_C(0^-)$  和  $i_L(0^-)$ 。在  $t = 0^-$  时, 开关尚未闭合, 因电路已处于稳态, 故电容等效为开路, 电感等效为短路, 因此由图 4-17(a) 可求得

$$u_C(0^-) = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} u_s = \frac{2 + 1}{3 + 2 + 1} \times 12 = 6\text{V}$$

$$i_L(0^-) = \frac{u_s}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{12}{3 + 2 + 1} = 2\text{A}$$

其次, 画出电路的复频域模型如图 4-17(b) 所示。则 a 点的节点方程为

$$\left( \frac{1}{sL + R_1} + sC + \frac{1}{R_3} \right) Y(s) = \frac{Li_L(0^-)}{sL + R_1} + \frac{u_C(0^-)/s}{\frac{1}{sC}} + \frac{U_s(s)}{sL + R_1}$$

将  $L, C, R_1, R_3$  代入上式, 得

$$\left( \frac{1}{s+3} + s + 1 \right) Y(s) = \frac{i_L(0^-)}{s+3} + u_C(0^-) + \frac{U_s(s)}{s+3} \quad (2)$$



$$\text{由上式可解得} \quad Y(s) = \frac{i_L(0^-) + (s+3)u_C(0^-)}{s^2 + 4s + 4} + \frac{U_s(s)}{s^2 + 4s + 4} \quad (3)$$

上式第一项仅与电路及其初始储能有关,因而是零输入响应的象函数  $Y_x(s)$ ;而第二项仅与电路及其输入的象函数  $U_s(s)$  有关,所以是零状态响应的象函数  $Y_f(s)$ 。即

$$Y_x(s) = \frac{i_L(0^-) + (s+3)u_C(0^-)}{s^2 + 4s + 4}, \quad Y_f(s) = \frac{U_s(s)}{s^2 + 4s + 4}$$

将初始值和  $U_s(s) = 12/s$  代入上式并展开,得

$$Y_x(s) = \frac{2 + (s+3) \times 6}{s^2 + 4s + 4} = \frac{6s+20}{s^2 + 4s + 4} = \frac{8}{(s+2)^2} + \frac{6}{s+2}$$

$$Y_f(s) = \frac{U_s(s)}{s^2 + 4s + 4} = \frac{12}{s(s+2)^2} = \frac{3}{s} - \frac{6}{(s+2)^2} - \frac{3}{s+2}$$

所以

$$y_x(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_x(s)] = (8t+6)e^{-2t}U(t)$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = (3 - 6te^{-2t} - 3e^{-2t})U(t)$$

### 4.4.3 系统函数(转移函数)

#### 1. 定义

$$\text{由式(4-57)可知} \quad Y_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)}F(s)$$

定义系统零状态响应的象函数  $Y_f(s)$  与激励的象函数  $F(s)$  之比为系统函数(又称为转移函数),用  $H(s)$  表示,即

$$H(s) = Y_f(s)/F(s) \quad (4-64)$$

$$\text{则} \quad Y_f(s) = H(s)F(s) \quad (4-65)$$

另一方面,在第2章中已知系统的零状态响应为激励与冲激响应的卷积

$$y_f(t) = h(t) * f(t)$$

$$\text{两边取拉氏变换,得} \quad Y_f(s) = \mathcal{L}[h(t)]F(s)$$

$$\text{与式(4-65)比较,得} \quad H(s) = \mathcal{L}[h(t)] \quad (4-66)$$

即系统的冲激响应与系统函数  $H(s)$  是一对拉氏变换对,可记为

$$h(t) \longleftrightarrow H(s) \quad (4-67)$$

根据式(4-65),系统函数在求解零状态响应时是非常有用的:先计算输入的拉氏变换,  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ ;再将该变换乘以系统函数,即  $Y_f(s) = H(s)F(s)$ ;最后该乘积的逆变换即为零状态响应,即  $y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)]$ 。

#### 2. 系统函数的计算

由上面讨论可知,可以由式(4-64)或式(4-66)求得系统函数,此时需计算输入的拉氏变换  $F(s)$ 、输出的拉氏变换  $Y_f(s)$  或先求得冲激响应  $h(t)$ 。如果描述 LTI 系统的微分方程已知,则通过观察系统方程的标准形式就可以得到系统函数。

设 LTI 系统的微分方程可以表示为如下的标准形式

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k f^{(k)}(t) \quad (4-68)$$

其中,  $a_i$  和  $b_k$  是实常数。

因为系统函数是对零状态响应定义的, 所以考虑零初始条件下式(4-68)的拉氏变换, 得到

$$s^n Y(s) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i s^i Y(s) = \sum_{k=0}^m b_k s^k F(s) \quad (4-69)$$

由此可得 
$$H(s) = Y(s)/F(s) = \left( \sum_{k=0}^m b_k s^k \right) / \left( s^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i s^i \right) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (4-70)$$

由式(4-70)可知,  $H(s)$  是有理函数, 其分子多项式中  $s^k$  的系数对应于  $f(t)$  的第  $k$  阶导数的系数  $b_k$ , 而分母多项式中  $s^i$  的系数对应于  $y(t)$  的第  $i$  阶导数的系数  $a_i$ 。因此, 能够由系统的微分方程获得系统函数; 相反, 也能够由系统函数确定系统的微分方程。因此, 除了初始条件以外, 系统函数可以完全描述一个因果系统。

【例 4-27】 某因果系统的响应  $y(t)$  与激励  $f(t)$  的关系用如下微分方程来描述

$$y(t) = -0.5y''(t) - 1.5y'(t) + 3f'(t) + 9f(t)$$

求系统的系统函数和系统的冲激响应。

解:(1) 首先把系统方程写为标准形式

$$0.5y''(t) + 1.5y'(t) + y(t) = 3f'(t) + 9f(t)$$

观察该方程, 写出系统函数为

$$H(s) = \frac{3s + 9}{0.5s^2 + 1.5s + 1} = \frac{6s + 18}{s^2 + 3s + 2}$$

(2) 因为冲激响应是  $H(s)$  的拉氏逆变换, 所以利用部分分式展开, 得

$$H(s) = \frac{6s + 18}{s^2 + 3s + 2} = \frac{6s + 18}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s + 2}$$

式中  $A_1 = (s + 1)H(s) \big|_{s=-1} = 12$ ,  $A_2 = (s + 2)H(s) \big|_{s=-2} = 6$

于是 
$$H(s) = \frac{12}{s + 1} - \frac{6}{s + 2}$$

所以 
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = (12e^{-t} - 6e^{-2t})U(t)$$

【例 4-28】 求图 4-18(a) 所示电路的系统函数  $H(s) = U_2(s)/U_1(s)$ 。

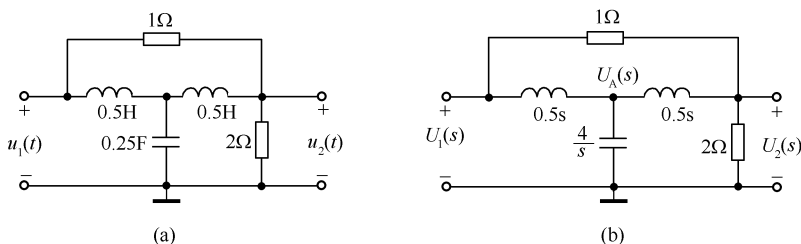


图 4-18 例 4-28 的图

解: 因为系统函数定义是对零状态响应的, 故画出零初始条件下电路的复频域模型如图 4-18(b) 所示。编写节点方程, 有

$$\begin{aligned} \frac{2}{s} [U_A(s) - U_1(s)] + \frac{s}{4} U_A(s) + \frac{2}{s} [U_A(s) - U_2(s)] &= 0 \\ [U_2(s) - U_1(s)] + \frac{2}{s} [U_2(s) - U_A(s)] + \frac{1}{2} U_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

合并各项,并联立两个方程消去  $U_A(s)$ ,从得到的方程求解  $U_2(s)/U_1(s)$ 。最后得到系统函数为

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{2s^2 + 32s + 32}{3s^3 + 4s^2 + 48s + 32}$$

## 4.5 系统特性与系统函数的关系

在系统分析与设计中,因果性、稳定性与频率响应是表征系统的三个重要特性,对于 LTI 系统,这三个特性与系统函数密切相关。下面分别加以讨论。

### 4.5.1 系统的因果性

已经知道,因果性是指任一时刻系统的输出仅取决于该时刻和该时刻之前的输入值。一个 LTI 连续系统为因果系统的充分必要条件是系统的单位冲激响应满足:

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

即单位冲激响应为因果信号。因为因果信号拉氏变换的 ROC 是某个右半平面,而冲激响应的拉氏变换就是系统函数,所以因果系统的系统函数的 ROC 是某个右半平面。应该说明的是,相反的结论未必成立。不过若系统函数是有理的,系统的因果性等价于系统函数的 ROC 位于最右边极点的右半平面(在前面各节的讨论中仅涉及因果系统,故因果性的条件是自动满足的,并不需要另外加以说明)。

### 4.5.2 系统的稳定性

在分析与设计各类系统时,系统的稳定性是一个重要问题。稳定性是系统自身的性质之一,与激励信号的情况无关。

一个系统,如果对任意的有界输入其零状态响应也是有界的,则称此系统为稳定系统,也可称为有界输入有界输出(BIBO)稳定系统。也就是说,设  $M_f, M_y$  为有界正值,如果对所有的激励信号  $f(t)$

$$|f(t)| \leq M_f \quad (4-71)$$

系统的零状态响应  $y_f(t)$  满足

$$|y_f(t)| \leq M_y \quad (4-72)$$

则称该系统是稳定的。下面给出系统稳定的充分必要条件。

连续系统是稳定系统的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq M \quad (4-73)$$

式中,  $M$  为有界正值。即若系统的冲激响应是绝对可积的,则系统是稳定的。下面给出此条件的证明。

充分性的证明:对任意的有界输入  $f(t)$ ,  $|f(t)| \leq M_f$ , 系统的零状态响应为

$$y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

$$|y_f(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |f(t - \tau)| d\tau \leq M_f \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

如果  $h(t)$  是绝对可积的,即式(4-73)成立,则

$$|y_f(t)| \leq M_f M$$

取  $M_y = M_f M$ , 即得  $|y_f(t)| \leq M_y$ , 即  $y_f(t)$  有界, 因此式(4-73)是充分的。

必要性的证明: 当系统是稳定的, 如果  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt$  无界, 我们来证明至少有一个有界的输入  $f(t)$  产生无界的输出  $y_f(t)$ 。为此, 选择如下的输入信号

$$f(t) = \begin{cases} 0, & h(-t) = 0 \\ \frac{h(-t)}{|h(-t)|}, & h(-t) \neq 0 \end{cases}$$

显然  $|f(t)| \leq 1$  为有界信号。

$$\text{由于} \quad y_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$\text{令 } t=0, \text{ 有 } y_f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(-\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$$

上式表明, 如果  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$  无界, 则至少  $y_f(0)$  无界, 因此式(4-73)也是必要的。

在以上的分析中并未涉及系统的因果性, 这说明无论因果稳定系统或非因果稳定系统都要满足式(4-73)。对于因果系统, 式(4-73)可以改写为

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt \leq M \quad (4-74)$$

因为  $h(t)$  的拉氏变换是系统函数  $H(s)$ , 所以式(4-73)和式(4-74)的条件也可以用  $H(s)$  说明。下面先讨论因果系统的稳定性, 非因果系统的稳定性问题将在 4.6 节讨论。

对于因果系统,  $h(t)$  为因果信号, 其拉氏变换  $H(s)$  的 ROC 是某条垂直于  $\sigma$  轴的直线的右边。如果系统是稳定的, 则式(4-74)成立, 即  $h(t)$  绝对可积, 因此  $h(t)$  的傅里叶变换存在。因为傅里叶变换是沿虚轴对拉氏变换的求值, 所以  $h(t)$  的拉氏变换  $H(s)$  的 ROC 应包含  $j\omega$  轴。综合上述两个结果,  $H(s)$  的 ROC 是包含  $j\omega$  在内的整个  $s$  平面的右半平面, 即  $\text{Re}[s] \geq 0$ 。由前面关于 ROC 的讨论可知, ROC 中不包含任何极点, 因此,  $H(s)$  的所有极点均应在  $s$  平面的左半平面。至此, 可得出因果系统稳定性的另一个充分必要条件: 系统函数  $H(s)$  的所有极点均在  $s$  平面的左半平面。

**【例 4-29】** 如图 4-19 所示因果反馈系统,  $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ , 当常数  $K$  满足什么条件时系统是稳定的?

**解:** 由图 4-19 可得  $X(s) = KY(s) + F(s)$   
和  $Y(s) = G(s)X(s)$   
将①式代入②式, 得  $Y(s) = KG(s)Y(s) + G(s)F(s)$

$$\text{则} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{G(s)}{1 - KG(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2 - K}$$

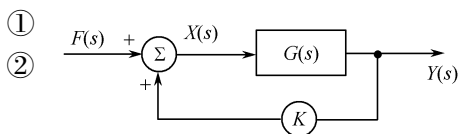


图 4-19 例 4-29 的图

$$H(s) \text{ 的极点为 } p_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 + K}$$

为使  $H(s)$  的极点均在左半平面, 必须

$$0 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 + K < \left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad \text{此时 } H(s) \text{ 有 2 个或 1 个负实根}$$

$$\text{或} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 + K < 0, \quad \text{此时 } H(s) \text{ 有位于左半平面的共轭复根}$$

由以上两式解得  $K < 2$ , 即当  $K < 2$  时, 系统是稳定的。

### 4.5.3 由系统函数 $H(s)$ 确定频率响应

如果系统是稳定的, 则其频率响应存在, 并且可以由系统函数按下式求出:

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

下面从系统函数的零极点分布图来研究频率响应  $H(j\omega)$ 。

设因果系统的系统函数  $H(s)$  的表达式为

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = b_m \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (\text{设 } b_m > 0) \quad (4-75)$$

令  $s = j\omega$ , 即在  $s$  平面中  $s$  沿虚轴移动, 得到

$$H(j\omega) = b_m \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)} \quad (4-76)$$

由式(4-76)可知, 频率响应取决于零、极点的分布, 即取决于  $z_j, p_i$  的位置。而式(4-76)中的  $b_m$  是常数, 对频率响应的研究无关紧要, 不妨设  $b_m > 0$ 。分母中任一因子  $(j\omega - p_i)$  实际上是由极点  $p_i$  引向虚轴上某点  $j\omega$  的一个矢量; 分子中任一因子  $(j\omega - z_j)$  也是由零点  $z_j$  引向虚轴上某点  $j\omega$  的一个矢量。图4-20画出了由零点  $z_1$  和极点  $p_1$  与点  $j\omega$  连接构成的两个矢量, 图中  $N_1$  和  $M_1$  分别表示矢量的模,  $\psi_1$  和  $\theta_1$  分别表示矢量的辐角。

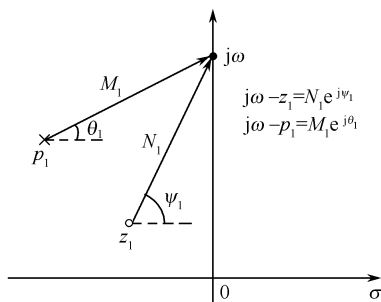


图4-20  $(j\omega - z_1)$  和  $(j\omega - p_1)$  矢量

对任意零点  $z_j$  和极点  $p_i$ , 相应的矢量  $(j\omega - z_j)$  和  $(j\omega - p_i)$  可以分别表示为

$$j\omega - z_j = N_j e^{j\psi_j} \quad (4-77)$$

$$j\omega - p_i = M_i e^{j\theta_i} \quad (4-78)$$

其中,  $N_j$  和  $M_i$  分别表示两矢量的模,  $\psi_j$  和  $\theta_i$  则分别表示它们的辐角。

于是, 式(4-76) 可以表示为

$$H(j\omega) = b_m \frac{N_1 e^{j\psi_1} N_2 e^{j\psi_2} \cdots N_m e^{j\psi_m}}{M_1 e^{j\theta_1} M_2 e^{j\theta_2} \cdots M_n e^{j\theta_n}} = b_m \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n} e^{j[(\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

其中,  $|H(j\omega)| = b_m \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n}$  (或记为  $H(\omega)$ ) 为幅频响应, 而

$$\varphi(\omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$$

为相频响应。

当  $\omega$  沿虚轴移动时, 各矢量的模和辐角都随之改变, 于是得出幅频特性曲线和相频特性曲线。

**【例4-30】** 研究图4-21(a)所示RC网络的频响特性  $H(j\omega) = U_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ 。

**解:** 容易写出系统函数表达式

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

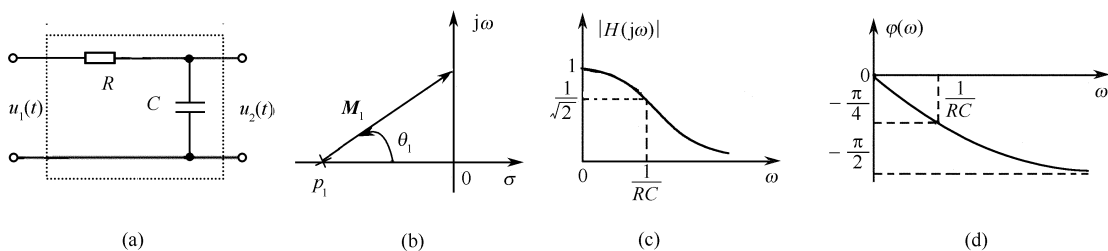


图 4-21 例 4-30 的图

极点位于  $p_1 = -\frac{1}{RC}$  处, 零、极点分布如图 4-21(b) 所示。由图可知

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{M_1 e^{j\theta_1}}$$

于是  $|H(j\omega)| = \frac{1}{RC} \frac{1}{M_1}, \quad \varphi(\omega) = -\theta_1$

当  $\omega = 0$  时,  $M_1 = \frac{1}{RC}, \theta_1 = 0$ , 所以  $|H(j0)| = 1, \varphi(0) = 0$ 。

当  $\omega = \frac{1}{RC}$  时,  $M_1 = \frac{1}{RC} \times \sqrt{2}, \theta_1 = \frac{\pi}{4}$ , 所以  $|H(j\frac{1}{RC})| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi(\frac{1}{RC}) = -\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$ 。

当  $\omega \rightarrow \infty$  时,  $M_1 \rightarrow \infty, \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $|H(j\infty)| = 0, \varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2}$ 。

据此画出幅频特性和相频特性曲线如图 4-21(c) 和(d) 所示。由幅频特性曲线可知这是一个低通滤波器。

**【例 4-31】** 已知系统函数  $H(s) = \frac{4s}{s^2 + 2s + 2}$ , 画出零极点图; 用图解法求  $|H(j2)|$  和  $\varphi(2)$ ; 用图解法、解析法求  $|H(j\omega)|$  和  $\varphi(\omega)$ 。

解:

$$H(s) = 4 \times \frac{s}{(s+1-j)(s+1+j)}$$

零点  $z_1 = 0$ , 极点  $p_1 = -1 + j, p_2 = -1 - j$ , 故零极点图如图 4-22(a) 所示。相应的矢量图如图 4-22(b) 所示。

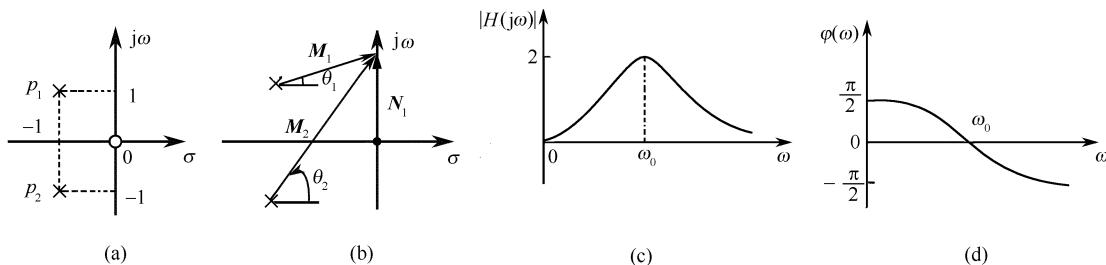


图 4-22 例 4-31 的图

由图 4-22(b) 可知, 当  $\omega = 2$  时

$$N_1 = 2, \quad M_1 = \sqrt{1^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}, \quad M_2 = \sqrt{1^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10};$$

$$\varphi_1 = 90^\circ, \quad \theta_1 = 45^\circ, \quad \theta_2 = \arctan 3 = 71.57^\circ$$

所以 
$$|H(j2)| = 4 \frac{N_1}{M_1 M_2} = \frac{4 \times 2}{\sqrt{2} \times \sqrt{10}} = 1.79$$

$$\varphi(2) = \varphi_1 - (\theta_1 + \theta_2) = -26.57^\circ$$

同理,用图解法可求得不同  $\omega$  的  $|H(j\omega)|$  和  $\varphi(\omega)$ ,如表4-4所示。由表4-4,即可画出幅频特性和相频特性曲线如图4-22(c)和(d)所示。

如用解析法,由

$$H(j\omega) = \frac{4j\omega}{(j\omega)^2 + j2\omega + 2} = \frac{4\omega e^{j\frac{\pi}{2}}}{(2 - \omega^2) + j2\omega}$$

$$= \frac{4\omega e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{(2 - \omega^2)^2 + (2\omega)^2} e^{j\arctan \frac{2\omega}{2 - \omega^2}}}$$

所以 
$$|H(j\omega)| = \frac{4|\omega|}{\sqrt{(2 - \omega^2)^2 + (2\omega)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2\omega}{2 - \omega^2}$$

据此也可以画出幅频特性与相频特性曲线,与图解法结果相同。

表4-4 例4-31 频率响应随频率变化的取值

$\omega$	$H(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	0	$90^\circ$
1	1.79	$26.57^\circ$
$\sqrt{2}$	2	0
2	1.79	$-26.57^\circ$
3	1.3	$-50^\circ$
5	0.8	$-66^\circ$
10	0.4	$-78.5^\circ$
$\infty$	0	$-90^\circ$

## 4.6 双边拉普拉斯变换

单边拉氏变换仅适合研究因果信号和因果系统的问题,如果涉及非因果信号或非因果系统,则必须使用双边拉氏变换。本节主要讨论单边和双边拉氏变换特性之间的差别,以及双边拉氏变换在系统分析中的应用。

为方便讨论,将双边拉氏变换式(4-3)和双边拉氏逆变换式(4-5)重写如下:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

或简记为

$$f(t) \longleftrightarrow F(s)$$

### 4.6.1 双边拉普拉斯变换的特性

双边拉氏变换的特性中,线性、尺度变换、 $s$ 域平移、卷积及 $s$ 域微分特性与单边拉氏变换是相同的(ROC可能会改变),因此下面仅讨论与单边拉氏变换不同的特性(不再证明)。

#### 1. 时移特性

设

$$f(t) \longleftrightarrow F(s), \quad \text{ROC}: R_x$$

则

$$f(t - \tau) \longleftrightarrow e^{-s\tau} F(s) \quad (4-79)$$

因为双边拉氏变换的积分范围为  $-\infty \sim +\infty$ ,所以在单边特性中关于时移的限制取消了。

#### 2. 时域微分特性

设

$$f(t) \longleftrightarrow F(s), \quad \text{ROC}: R_x$$

$$\text{则} \quad f'(t) \longleftrightarrow sF(s), \quad \text{ROC 至少为 } R_x \quad (4-80)$$

【例 4-32】 求  $f(t) = \frac{d^2}{dt^2} [e^{-3(t+2)} U(t+2)]$  的双边拉氏变换。

解: 
$$e^{-3t} U(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+3}, \quad \text{Re}[s] > -3$$

由式(4-79)的时移特性,得

$$e^{-3(t+2)} U(t+2) \longleftrightarrow \frac{1}{s+3} e^{2s}$$

利用式(4-80)给出的微分特性两次,即得

$$\frac{d^2}{dt^2} [e^{-3(t+2)} U(t+2)] \longleftrightarrow \frac{s^2}{s+3} e^{2s}, \quad \text{Re}[s] > -3$$

### 3. 时域积分特性

设 
$$f(t) \longleftrightarrow F(s), \quad \text{ROC}: R_x$$

那么 
$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \longleftrightarrow \frac{F(s)}{s}, \quad \text{ROC}: \text{Re}[s] > 0 \cap R_x \quad (4-81)$$

## 4.6.2 系统函数与系统的稳定性

### 1. 系统函数

对于因果系统,我们将系统函数定义为零状态响应的单边拉氏变换与输入的单边拉氏变换之比。当涉及非因果系统时,应考虑  $t < 0$  部分,相应地,系统函数  $H(s)$  应定义为

$$H(s) = \frac{\text{零状态响应的双边拉氏变换}}{\text{输入信号的双边拉氏变换}} = \frac{Y_b(s)}{F_b(s)} \quad (4-82)$$

式中,  $Y_b(s)$ ,  $F_b(s)$  分别表示输出与输入的双边拉氏变换。需要说明的是,用式(4-82)得到的仅仅是系统函数的数学表达式,其 ROC 只能由系统的其他条件获得。

因为因果信号的双边拉氏变换与单边拉氏变换相同,因此式(4-82)包含了式(4-64)的情形。

### 2. 系统的稳定性

对于任意的 LTI 系统(包括因果与非因果系统),系统稳定的充分必要条件由式(4-73)给出,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq M, \quad M \text{ 为有界正值}$$

由于  $h(t)$  绝对可积,故  $h(t)$  的傅里叶变换存在,因此  $H(s)$  的 ROC 应包含  $j\omega$  轴。于是,对任意 LTI 系统,系统稳定的充分必要条件还可以表示为:系统函数  $H(s)$  (注意是  $h(t)$  的双边拉氏变换) 的 ROC 包含  $j\omega$  轴。

### 4.6.3 双边拉普拉斯逆变换

正如 4.3 节所讨论的单边情况那样,这里考虑有理函数的双边拉氏逆变换。双边与单边拉氏逆变换的主要差别是,对于双边情况,必须利用 ROC 确定唯一的逆变换。



假设有理函数 
$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

若  $m \geq n$ , 利用长除法表示为

$$F(s) = \sum_{k=0}^{m-n} C_k s^k + F_1(s)$$

其中,  $F_1(s) = N_1(s)/D(s)$  为有理真分式。

按非重极点的情况将  $F_1(s)$  做部分分式展开, 有

$$F_1(s) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - p_k}$$

首先

$$\sum_{k=0}^{m-n} C_k \delta^{(k)}(t) \longleftrightarrow \sum_{k=0}^{m-n} C_k s^k$$

其次, 对于双边情况,  $F_1(s)$  展开式中每一项的逆变换都是以下两种情形之一:

$$A_k e^{p_k t} U(t) \longleftrightarrow \frac{A_k}{s - p_k} \quad (4-83)$$

或

$$-A_k e^{p_k t} U(-t) \longleftrightarrow \frac{A_k}{s - p_k} \quad (4-84)$$

根据  $F_1(s)$  各极点与收敛域的位置关系选择式(4-83)或式(4-84)。如果极点位于 ROC 的左侧, 则关于该极点的展开项的逆变换为因果信号, 由式(4-83)得到; 如果极点位于 ROC 的右侧, 则关于该极点的展开项的逆变换为反因果信号, 由式(4-84)得到。

同理, 可得重极点和共轭极点情况下的逆变换, 这里不再赘述。

**【例 4-33】** 某 LTI 系统由微分方程  $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 2f'(t) + 2f(t)$  描述, 求:

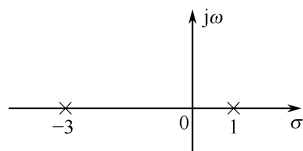
(1) 系统函数  $H(s)$  及所有可能的冲激响应, 并确定每种情况下系统的因果性与稳定性;

(2) 如果系统是非因果稳定的, 且  $f(t) = e^{-2(t+1)} U(t+1)$ , 求零状态响应。

**解:** (1) 微分方程两边取双边拉氏变换并利用微分特性, 得

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{2s + 2}{s^2 + 2s - 3} = \frac{1}{s + 3} + \frac{1}{s - 1}$$

由此画出极点图如图 4-23 所示。



根据极点 ( $s = -3$  和  $s = 1$ ) 的位置,  $H(s)$  可能的收敛域如下: 图 4-23 例 4-33 的图

(a)  $\text{Re}[s] < -3$ , 此时系统是非因果的, 且 ROC 不含  $j\omega$  轴, 故系统是不稳定的。两个极点都在 ROC 的右侧, 故由式(4-84) 可得

$$h(t) = -e^{-3t} U(-t) - e^t U(-t)$$

(b)  $-3 < \text{Re}[s] < 1$ , 此时系统是非因果的, 因 ROC 包含  $j\omega$  轴, 故系统是稳定的。

极点  $s = -3$  在 ROC 的左侧, 故

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + 3} \right] = e^{-3t} U(t)$$

极点  $s = 1$  在 ROC 的右侧, 故

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s - 1} \right] = -e^t U(-t)$$

所以

$$h(t) = e^{-3t} U(t) - e^t U(-t)$$

(c)  $\text{Re}[s] > 1$ , 此时系统是因果的, 因 ROC 不包含  $j\omega$  轴, 故系统是不稳定的。两个极点都在 ROC 的左侧, 所以

$$h(t) = (e^{-3t} + e^t)U(t)$$

(2) 第(b) 种情况下系统是非因果稳定的,所以

$$H(s) = \frac{2s+2}{(s-1)(s+3)}, \quad \text{ROC: } -3 < \text{Re}[s] < 1$$

因为 
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+2}e^s, \quad \text{ROC: } \text{Re}[s] > -2$$

所以 
$$Y_f(s) = H(s)F(s) = \frac{2s+2}{(s-1)(s+3)} \cdot \frac{e^s}{s+2}, \quad \text{ROC: } -2 < \text{Re}[s] < 1$$

$Y_f(s)$  可以展开为 
$$Y_f(s) = \left[ \frac{-1}{s+3} + \frac{2/3}{s+2} + \frac{1/3}{s-1} \right] e^s$$

ROC 在极点  $s = -3$  及  $s = -2$  的右侧,在极点  $s = 1$  的左侧,由式(4-83)、式(4-84) 并利用时移特性,得

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = -e^{-3(t+1)}U(t+1) + \frac{2}{3}e^{-2(t+1)}U(t+1) - \frac{1}{3}e^{(t+1)}U(-t-1)$$

## 4.7 MATLAB 应用举例

### 4.7.1 用 MATLAB 计算拉普拉斯正反变换

MATLAB 提供了两个函数来计算符号函数的正反变换:laplace 和 ilaplace,其调用格式为

```
F = laplace(f)
f = ilaplace(F)
```

上两式右端的 f 和 F 分别为时间函数和拉氏变换的数学表达式。在调用这两个函数时,通常还需要使用函数 sym 或 syms 将数值变量转换为“符号变量”。例如  $s = \text{sym}(\text{str})$  或  $\text{syms } x \ y \ t$  等,其中 str 是字符串。

**【例 4-34】** 用 laplace 和 ilaplace 求:

(1)  $f(t) = e^{-2t} \cos(3t)U(t)$  的拉氏变换; (2)  $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$  的拉氏逆变换。

解:(1) 的程序为:

```
% Program ch4_1
syms t;
F = laplace(exp(-2*t)*cos(3*t));
F = simplify(F)
% or can do it like this:
% f = sym('exp(-2*t)*cos(3*t)')
% F = laplace(f)
```

运行结果为

```
F = (s+2)/(s^2+4*s+13)
```

即

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+13}$$

(2) 的程序为

```
% Program ch4_2
syms s;
F = 1/((s+1)*(s+2));
f = ilaplace(F)
```

运行结果为

```
f = 2 * exp(-3/2 * t) * sinh(1/2 * t)
```

即

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

#### 4.7.2 利用 MATLAB 实现部分分式展开

MATLAB 函数 `residue` 用于将  $F(s)$  做部分分式展开,或者将展开式重新合并为有理函数。其一般调用格式为

```
[r,p,k] = residue(num,den)
[num,den] = residue(r,p,k)
```

其中,num 和 den 分别为  $F(s)$  分子多项式和分母多项式的系数向量,r 为各部分分式的分子,p 为极点组成的向量,k 为分子与分母多项式相除所得的商的系数向量。若  $F(s)$  为真分式,则 k 为零。

**【例 4-35】** 用 MATLAB 求  $F(s) = \frac{s^4+1}{s(s+1)(s+2)^2}$  的部分分式展开式。

**解:**程序如下。

```
% Program ch4_3
format rat
den = poly([0 -1 -2 -2]);
num = [1 0 0 0 1];
[r,p,k] = residue(num,den)
```

程序运行结果为

```
r = -13/4    17/2    -2    1/4
p = -2      -2      -1    0
k = 1
```

据此可以得到  $F(s)$  的展开式为

$$F(s) = 1 + \frac{-13/4}{s+2} + \frac{17/2}{(s+2)^2} + \frac{-2}{s+1} + \frac{1/4}{s}$$

注: $F(s)$  有多阶极点时,简单极点排在前,高阶极点排在后。

#### 4.7.3 系统的零极点图

利用 MATLAB 函数 `roots` 很容易求得系统函数的零点和极点。其一般调用格式为

```
p = roots(a)
```

其中,  $a$  为多项式的系数向量。

如果要进一步画出系统的零极点图, 可以用函数 `pzmap` 实现。其一般调用格式为

```
pzmap(sys)
```

其中, `sys` 是系统的模型, 可借助函数 `tf` 获得, 调用格式为

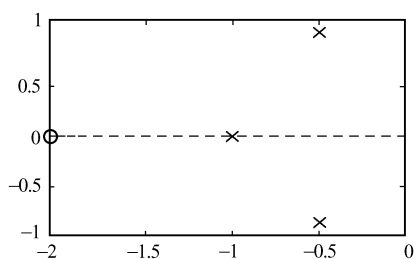
```
sys = tf(b,a)
```

式中,  $b, a$  分别为  $H(s)$  分子、分母多项式的系数向量。

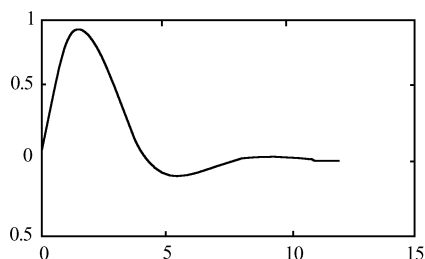
**【例 4-36】** 已知系统函数  $H(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+2s+1}$ , 试画出系统的零极点图, 以及系统的单位冲激响应和幅频特性、相频特性曲线。

**解:** 程序如下。

```
% Program ch4_4
num = [0 0 1 2];
den = [1 2 2 1];
sys = tf(num,den);
subplot(2,2,1);
pzmap(sys);
t = 0:0.01:12;
h = impulse(num,den,t);
subplot(2,2,2);
plot(t,h);
title(' Impulse response ');
[H,w] = freqs(num,den);
subplot(2,2,3);
plot(w,abs(H));
title(' Magnitude response ');
subplot(2,2,4);
plot(w,angle(H));
title(' Phase response ');
```

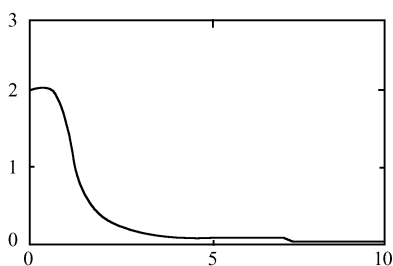


(a) Pole-Zero MaP

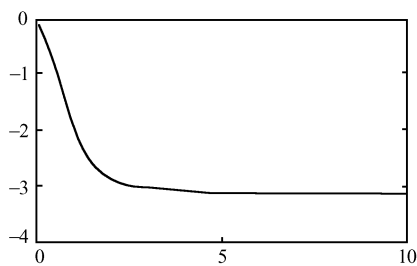


(b) Impulse response

图 4-24 例 4-36 的图



(c) Magnitude response



(d) Phase response

图 4-24 例 4-36 的图(续)

## 本章关键概念小结

- 拉普拉斯变换  $F(s)$  是复变量  $s = \sigma + j\omega$  的函数。
- 使拉普拉斯变换存在的  $s$  的取值范围称为收敛域。
- 双边拉普拉斯变换必须结合收敛域才能唯一确定对应的信号。
- 单边拉普拉斯变换是双边拉普拉斯变换的特殊情况,其积分从  $0^-$  开始。
- 单边拉普拉斯变换适合分析因果信号与因果系统。
- 单边拉普拉斯变换的收敛域是平行于虚轴的某条直线的右侧。
- 使  $F(s) = 0$  和  $F(s) = \infty$  的  $s$  值称为  $F(s)$  的零点和极点。
- 有理函数的拉普拉斯逆变换可以利用部分分式展开和已知的信号变换求出。
- 求解微分方程的步骤:
  - ① 求输入信号的变换;
  - ② 求方程的变换;
  - ③ 把输入信号的变换和初始条件代入到变换方程中;
  - ④ 求输出信号的变换;
  - ⑤ 利用逆变换求出输出信号。
- 利用电路元件的复频域模型和电路分析方法及拉普拉斯变换可以容易地求解电路。
- 系统函数是零状态响应的拉普拉斯变换  $Y(s)$  与输入的拉普拉斯变换  $F(s)$  的比值。
- 系统函数是系统冲激响应的拉普拉斯变换。
- 系统函数完全描述了因果 LTI 系统,除了初始条件之外。
- 系统除了增益和初始条件之外,完全可以由其系统函数的零极点图来描述。
- 系统稳定的充分必要条件是系统函数的收敛域包含虚轴,对因果系统,这个条件等价于  $H(s)$  的所有极点均位于左半平面。
- 稳定系统的频率响应是用  $j\omega$  代替  $H(s)$  中的  $s$  得到的,可以由零极点图用几何方法确定。
- 分析非因果信号与系统必须采用双边拉普拉斯变换。
- 双边拉普拉斯变换的大多数特性与单边变换相同,只有少数不同。

## 习题

4.1 写出下列信号对应于  $s$  平面的复频率。

$$(1) e^{-t} \sin(-5t) \quad (2) 3e^{-t} U(t) \quad (3) \cos 2t \quad (4) 2e^{-t} \cos(2t + 60^\circ)$$

4.2 求下列信号的单边拉氏变换。

$$\begin{aligned} (1) e^{-(t+\alpha)} \cos \omega t U(t) & \quad (2) 2\delta(t) - 3e^{-7t} U(t) \\ (3) (2\cos t + \sin t) U(t) & \quad (4) e^{-t} U(t) - e^{-(t-2)} U(t-2) \\ (5) \sin(\pi t) U(t) - \sin[\pi(t-1)] U(t-1) & \quad (6) (1 - e^{-t}) U(t) \\ (7) e^{-t} [U(t) - U(t-2)] & \quad (8) U(t) - 2U(t-1) + U(t-2) \\ (9) 2\delta(t-t_0) + 3\delta(t) & \quad (10) (t-1) U(t-1) \\ (11) e^{-t} \sin 2t U(t) & \quad (12) (1 - \cos \alpha t) e^{-\beta t} U(t) \\ (13) e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta) U(t) & \quad (14) 2e^{-5t} \operatorname{ch} 3t U(t) \end{aligned}$$

4.3 求下列信号的单边拉氏变换。

$$\begin{aligned} (1) \cos(3t-2) U(3t-2) & \quad (2) \delta(4t-2) & \quad (3) \sin(2t - \pi/4) U(t) \\ (4) (t-1) U(t) & \quad (5) \frac{\sin^2 t}{t} U(t) & \quad (6) t \cos^3 2t U(t) \\ (7) te^{-\alpha t} \sin t U(t) & \quad (8) (t^3 - 2t^2 + 1) U(t) & \quad (9) t^2 \cos 2t U(t) \\ (10) \frac{1 - e^{-\alpha t}}{t} U(t) & \quad (11) \frac{\sin \alpha t}{t} & \quad (12) \frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{t} \\ (13) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t - kT) & \quad (14) te^{-t} U(t-T) & \quad (15) te^{-(t-3)} U(t-1) \end{aligned}$$

4.4 试求下列信号的拉氏变换。

$$(1) \frac{d^2}{dt^2} [\sin \omega t U(t)] \quad (2) \frac{d^2}{dt^2} \sin \omega t U(t) \quad (3) \int_0^t \sin \omega \tau d\tau \quad (4) \int_0^t \left[ \int_0^\tau \sin \omega x dx \right] d\tau \quad (5) t \frac{d}{dt} \cos t U(t)$$

4.5 已知  $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ , 利用拉氏变换的性质, 求下列信号的拉氏变换。

$$\begin{aligned} (1) e^{-\alpha t} f(t/\alpha) & \quad (2) e^{-\frac{t}{\alpha}} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) & \quad (3) tf(\alpha t - \beta) \\ (4) te^{-\alpha t} f(\alpha t - \beta) & \quad (5) \frac{f(\alpha t - \beta)}{t} & \quad (6) \int_0^t f(\alpha \tau - \beta) d\tau \end{aligned}$$

4.6 求下列函数的拉氏逆变换。

$$\begin{aligned} (1) \frac{s^2 - s + 1}{(s+1)^2} & \quad (2) \frac{s^3 + s^2 + 1}{(s+1)(s+2)} & \quad (3) \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} & \quad (4) \frac{1 - e^{-4s}}{5s^2} \\ (5) \frac{1}{(s^2 + 1)^2} & \quad (6) \frac{s}{(s+2)(s+4)} & \quad (7) \frac{2}{s(s-1)^2} & \quad (8) \frac{s+5}{s(s^2 + 2s + 5)} \\ (9) \frac{4s+5}{s^2 + 5s + 6} & \quad (10) \frac{s+3}{(s+2)(s+1)^3} \end{aligned}$$

4.7 求下列函数的拉氏逆变换。

$$\begin{aligned} (1) \frac{1}{s(1 + e^{-s})} & \quad (2) \frac{1}{1 + e^{-s}} & \quad (3) \ln \frac{s}{s+9} \\ (4) \frac{1}{s(1 - e^{-s})} & \quad (5) \frac{\pi(1 + e^{-s})}{(s^2 + \pi^2)(1 - e^{-2s})} & \quad (6) \frac{\pi(1 + e^{-s})}{(s^2 + \pi^2)(1 - e^{-s})} \end{aligned}$$

4.8 求图 4-25 所示信号的拉氏变换。

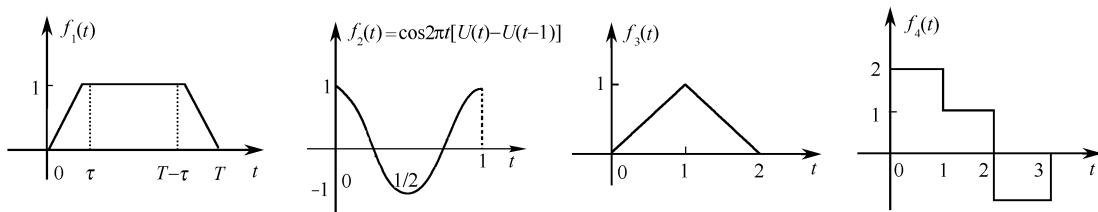


图 4-25

4.9 求下列函数的拉氏逆变换。

- (1)  $\frac{e^{-2(s+3)}}{s+3}$  (2)  $\frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}$  (3)  $\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)^2$  (4)  $\frac{s}{(s+2)[(s+1)^2+9]}$  (5)  $\frac{\pi}{s^2+\pi^2} \cdot \frac{1}{2s+1}$   
 (6)  $\frac{s^2+2}{s^2+1}$  (7)  $\frac{3s}{(s+4)(s+2)}$  (8)  $\frac{s^2+4}{(s+3)^2+4}$  (9)  $\frac{e^{-s}+e^{-2s}+1}{s^2+3s+2}$  (10)  $\frac{2s+5}{s^2+7s+12}$   
 (11)  $\frac{s+3}{s(s+2)}$  (12)  $\frac{e^{-(s-1)}+2}{(s-1)^2+1}$  (13)  $\ln \frac{s+1}{s}$

4.10 已知  $f(t)$  的拉氏变换  $F(s)$ , 试求  $f(t)$  的初值  $f(0^+)$  与终值  $f(\infty)$ 。

- (1)  $F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s(s+4)}$  (2)  $F(s) = 1 + \frac{1}{s}$  (3)  $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$   
 (4)  $F(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^3-s^2-s+1}$  (5)  $F(s) = \frac{2s+3}{(s+1)^2}$  (6)  $F(s) = \frac{3s+1}{s(s+1)}$   
 (7)  $F(s) = \frac{s^3+s^2+2s+1}{s^3+6s^2+11s+6}$  (8)  $F(s) = \frac{s^2+2s+3}{s^3+s^2+4s+4}$

4.11 试求图 4-26 所示各网络的系统函数  $H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$ 。

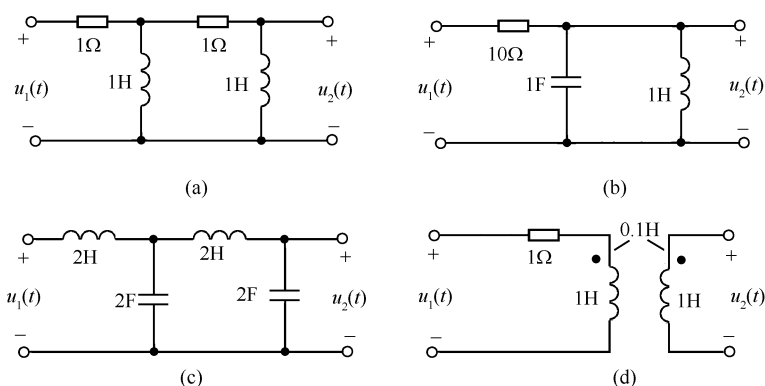


图 4-26

4.12\* 如图 4-27 所示因果周期信号, 求其象函数  $F(s)$ 。

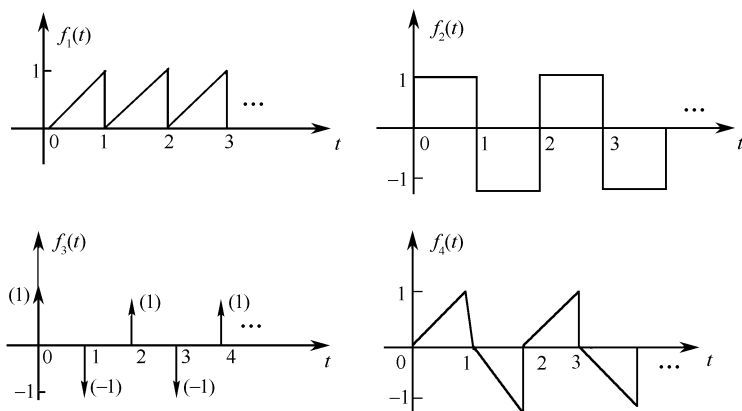


图 4-27

4.13 某 LTI 系统在激励为  $f(t) = 2e^{-t}U(t)$  时, 其零状态响应为  $y(t) = (2e^{-t} - 4e^{-2t} + 8e^{3t})U(t)$ , 求系统的单位冲激响应  $h(t)$ 。

4.14 已知系统函数及激励信号如下, 求系统零状态响应。

$$(1) H(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}, \quad f(t) = 2e^{-t}U(t)$$

$$(2) H(s) = \frac{s+1}{s+2}, \quad f(t) = 4tU(t)$$

$$(3) H(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^2 + 3s + 2}, \quad f(t) = e^{-3t}U(t)$$

4.15 已知某 LTI 系统的阶跃响应  $g(t) = e^{-t}U(t)$ , 若系统的输入  $f(t) = tU(t-2)$ , 求该系统的零状态响应  $y_f(t)$ 。

4.16\* 如图 4-28 所示电路, 以  $i(t)$  为输出, 求系统函数  $H(s)$  及阶跃响应  $g(t)$ 。

4.17\* 如图 4-29 所示电路, 已知  $u_{C1}(0^-) = 3V, u_{C2}(0^-) = 0V$ , 求:

(1) 电流  $i(t), t > 0$ ; (2) 讨论  $t = 0^-$  与  $t = 0^+$  瞬间, 电容  $C_2$  两端电荷发生的变化。

4.18 已知 LTI 系统的阶跃响应  $g(t) = (1 - e^{-2t})U(t)$ , 欲使系统的零状态响应  $y_f(t) = (1 - e^{-2t} - te^{-2t})U(t)$ , 求输入信号  $f(t)$ 。

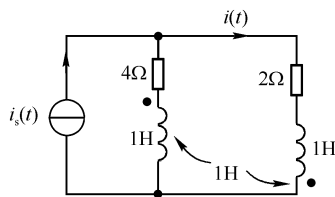


图 4-28

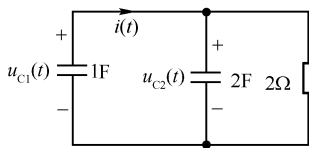


图 4-29

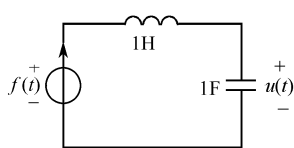


图 4-30

4.19 如图 4-30 所示无损 LC 谐振电路, 以  $u(t)$  为响应, 求:

(1) 系统频率特性  $H(j\omega)$ ; (2) 系统函数  $H(s)$ ; (3) 冲激响应  $h(t)$ 。

4.20 已知 LTI 系统微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f'(t) + 3f(t)$ 。求在下列两种情况下系统的全响应。

(1)  $f(t) = U(t), y(0^-) = 1, y'(0^-) = 2$ ; (2)  $f(t) = e^{-3t}U(t), y(0^-) = 1, y'(0^-) = 2$

4.21 如图 4-31 所示电路。

(1) 求系统的单位冲激响应  $h(t)$ ; (2) 欲使系统的零输入响应  $u_{Cx}(t) = h(t)$ , 求系统的初始状态;

(3) 欲使系统在单位阶跃信号激励下, 全响应为  $u_C(t) = U(t)$ , 求系统的初始状态。

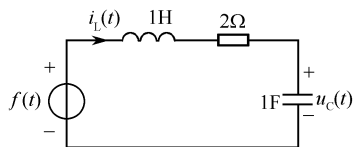


图 4-31

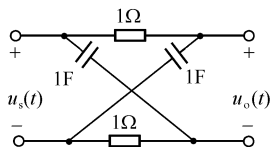


图 4-32

4.22\* 如图 4-32 所示桥形网络, 试求:

(1) 网络的传输函数  $H(s)$ , 绘出其零极点图; (2) 冲激响应  $h(t)$  和阶跃响应  $g(t)$ ;

(3) 在外加激励  $u_s(t) = \sin t U(t)$  作用下系统的零状态响应  $u_{gf}(t)$ 。

4.23 已知  $f(t) * \frac{d}{dt}f(t) = (1 - t)e^{-t}U(t)$ , 求  $f(t)$ 。

4.24 已知 LTI 系统, 当输入  $f(t) = e^{-t}U(t)$  时, 零状态响应  $y_f(t) = (3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-3t})U(t)$ , 试求系统的冲激响应。

4.25 某 LTI 系统的单位冲激响应  $h(t) = \delta(t) - 11e^{-10t}U(t)$ , 若其零状态响应  $y_f(t) = (1 - 11t)e^{-10t}U(t)$ , 试求系统的输入  $f(t)$ 。

4.26 如图 4-33(a) 所示电路, 已知系统函数  $H(s)$  的零、极点分布如图 4-33(b) 所示, 且  $H(0) = 1$ , 求  $R, L, C$  的值。



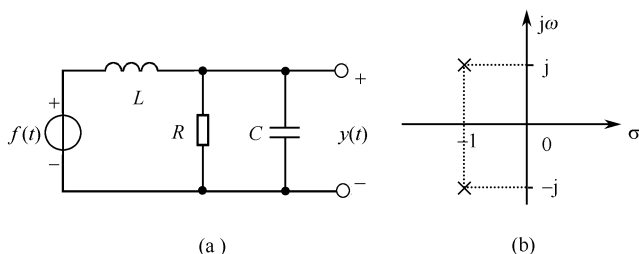


图 4-33

4.27 已知 LTI 因果系统  $H(s)$  的零、极点分布如图 4-34 所示,且  $H(0) = 1$ ,求:

(1) 系统函数  $H(s)$  的表达式; (2) 系统的单位阶跃响应。

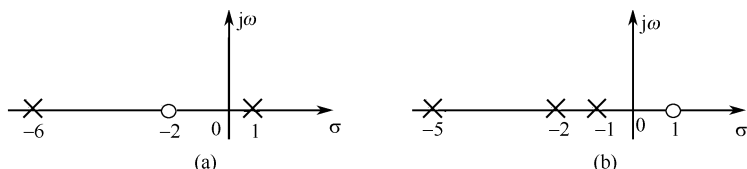


图 4-34

4.28\* 如图 4-35 所示电路,已知  $u_s(t) = e^{-2t}U(t)$ ,求  $u_L(t)$  的零状态响应。

4.29\* 如图 4-36 所示电路,已知  $u_s(t) = 2U(t)$ ,  $u_C(0^-) = \frac{4}{3}\text{V}$ ,  $i_L(0^-) = \frac{2}{3}\text{A}$ ,求响应  $u_C(t)$ ,并指出其零输入响应和零状态响应、自然响应和强迫响应、暂态响应和稳态响应。

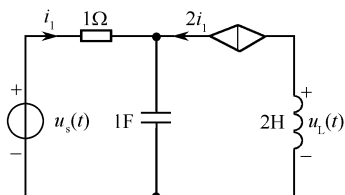


图 4-35

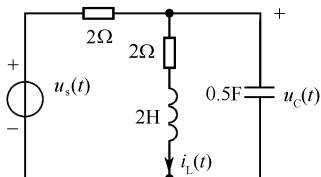


图 4-36

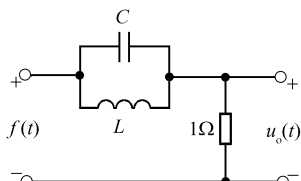


图 4-37

4.30\* 如图 4-37 所示电路。

- (1) 求系统函数  $H(s)$ ;
- (2) 若  $f(t) = \cos 2tU(t)$ ,要使响应中不存在稳态响应分量, $L, C$  应满足何条件?
- (3) 若  $L = 1\text{H}$ ,要使响应中不存在稳态响应分量,求  $u_o(t)$ ;
- (4) 若  $L = 1\text{H}, C = 1\text{F}$ ,求  $u_o(t)$ 。

4.31\* 如图 4-38 所示电路,原已达到稳定, $t = 0$  时开关由 1 转换到 2,已知  $U_s = \frac{1}{3}\text{V}$ ,  $R = \frac{1}{3}\Omega$ ,  $R_1 = \frac{2}{3}\Omega$ ,  $i_s(t) = e^{-t}U(t)$ ,求  $t > 0$  后电路的响应  $u_C(t)$ 。

4.32 系统框图如图 4-39 所示( $s^{-1}$  表示积分器),试求:

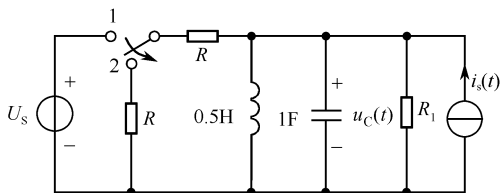


图 4-38

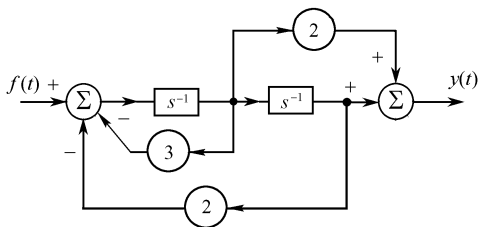


图 4-39

- (1) 系统的传输函数  $H(s)$  和单位冲激响应; (2) 描述系统输入输出关系的微分方程;  
 (3) 当输入  $f(t) = 2e^{-3t}U(t)$  时, 系统的零状态响应  $y_f(t)$ ; (4) 判断系统是否稳定。

4.33 已知某 LTI 系统  $H(s)$  的零极点分布如图 4-40 所示, 且  $h(0^+) = 2, f(t) = \sin t U(t)$ , 求系统函数  $H(s)$  和正弦稳态响应。

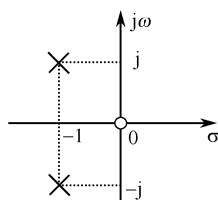


图 4-40

4.34 已知某连续时间 LTI 系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ 。

- (1) 确定该系统的系统函数  $H(s)$  及收敛域;  
 (2) 判断系统的稳定性, 若系统是稳定的, 求出系统的频率响应, 讨论其幅频和相频特性;  
 (3) 求系统的单位冲激响应  $h(t)$  及单位阶跃响应  $g(t)$ ;  
 (4) 若系统输入  $f(t) = e^{-t}U(t)$ , 求输出响应  $y_f(t)$ ;  
 (5) 当系统输出的拉氏变换为  $Y(s) = \frac{s+1}{(s+2)^2}$  时, 求系统的输入  $f(t)$ 。

4.35 已知某 LTI 系统, 当:

- (1)  $f(t) = e^{-t}U(t)$  时全响应为  $y(t) = (e^{-t} + te^{-t})U(t)$ ;  
 (2)  $f(t) = e^{-2t}U(t)$  时全响应为  $y(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})U(t)$ ;

求系统的零输入响应及当  $f(t) = U(t)$  时系统的全响应。

4.36 已知 LTI 系统的零、极点分布如图 4-41 所示,

- (1) 试用矢量图法判断各系统特性是高通、低通、带通还是带阻;  
 (2) 粗略绘出其幅频特性曲线。

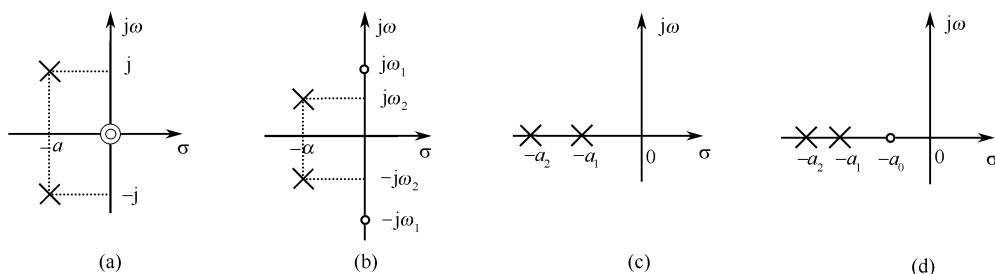


图 4-41

4.37 已知电路如图 4-42(a) 所示, 激励信号  $u_s(t)$  为一因果周期方波信号, 波形如图 4-42(b) 所示, 试求其响应  $u_c(t)$ , 并指出其暂态响应和稳态响应分量。

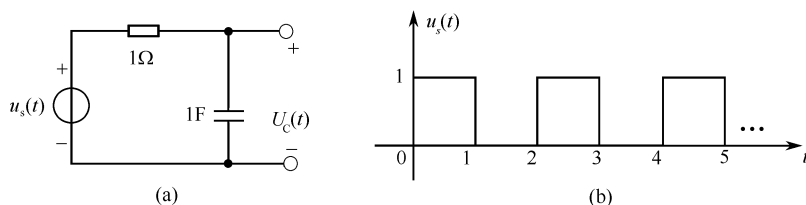


图 4-42

4.38 已知电路如图 4-43 所示, 求:

- (1)  $H(s) = Y(s)/F(s)$ ; (2) 使系统稳定的  $K$  的取值范围;  
 (3)  $K = 0.5, f(t) = 25\sin t U(t)$  时的零状态响应; (4)  $K = 2.5, f(t) = \sin t U(t)$  时的零状态响应。

4.39\* 某 LTI 因果系统框图如图 4-44 所示, 试确定:

- (1) 系统函数  $H(s)$ ; (2) 使系统稳定的  $K$  的取值范围。

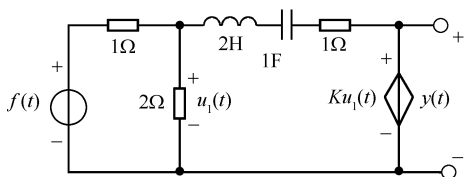


图 4-43

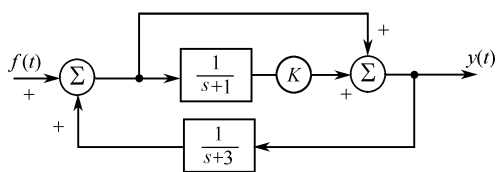


图 4-44

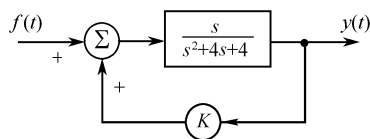


图 4-45

4.40\* 某 LTI 因果系统框图如图 4-45 所示,试确定:

- (1) 系统函数  $H(s)$ ;
- (2) 使系统稳定的  $K$  的取值范围;
- (3) 若  $K = 0$ ,系统的频率响应函数  $H(j\omega)$ ;
- (4) 使系统临界稳定的  $K$  的取值及临界稳定下系统的频率响应  $H(j\omega)$ ;
- (5) 以上两种情况下系统的单位冲激响应  $h(t)$ 。

4.41\* 已知某 LTI 系统的系统函数  $H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$ 。

- (1) 试计算其幅频特性和相频特性;
- (2) 求  $|F(j\omega)|$  出现最大值和  $\varphi(\omega)$  出现零值的  $\omega$  值;
- (3) 粗略绘出其幅频特性曲线,说明是何种滤波器,求截止频率  $\omega_c$ 。

4.42\* 已知电路如图 4-46(a) 所示,激励信号  $i_s(t)$  为因果周期信号,波形如图 4-46(b) 和 (c) 所示,试求其响应  $u_c(t)$ ,并指出其暂态响应和稳态响应分量。

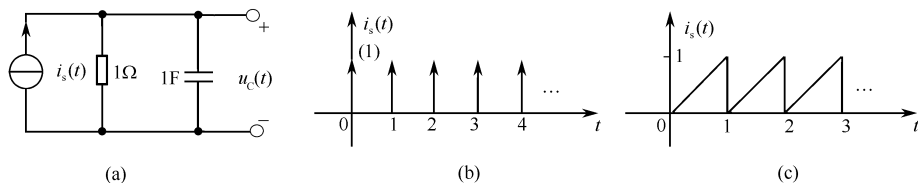


图 4-46

4.43\* 已知某 LTI 系统的微分方程为

$$y'''(t) + (1+b)y''(t) + b(b+1)y'(t) + b^2y(t) = f(t)$$

- (1) 若要系统稳定则  $b$  应为何值?
- (2) 若系统的冲激响应为  $h(t)$ ,则  $r(t) = h'(t) + h(t)$  的拉氏变换  $R(s)$  有几个极点?

## 上机练习

4.1 已知  $F(s) = \frac{s^3}{(s+5)(s^2+5s+25)}$ ,用 residue 求出  $F(s)$  的部分分式展开式,并写出  $f(t)$  的表达式。

4.2 系统的微分方程为  $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2f'(t) + f(t)$ ,  $f(t) = U(t)$ ,  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = 2$ ,用 MATLAB 画出系统的零输入、零状态和全响应的波形。

4.3 用 MATLAB 的 pzmap 命令绘出系统  $H(s) = \frac{s^3 + 1}{s^4 + 2s^2 + 1}$  的零极点图,并求系统的冲激响应、阶跃响应和频率响应,画出相应的图形。

4.4 设计具有两个零点和两个极点的高通滤波器,满足  $|\omega| > 100\pi$  时,  $0.8 \leq |H(j\omega)| \leq 1.2$ ,以及  $|H(j0)| = 0$ ,并且其有实值系数。

4.5 设计一个具有实值系数的低通滤波器,满足  $|\omega| < \pi$  时,  $0.8 \leq |H(j\omega)| \leq 1.2$ ,以及  $|\omega| > 10\pi$  时,  $|H(j\omega)| < 0.1$ 。

# 第5章 离散时间信号与系统的时域分析

## 内 容 提 要

从本章开始研究离散时间信号与系统分析。主要内容有：离散时间信号的描述和运算，离散时间系统的描述，离散时间系统的零输入响应和零状态响应的求解，特别是用卷积和求零状态响应的方法。

## 5.1 离散时间信号与离散系统

### 5.1.1 离散时间信号概述

在一些离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号，简称为离散信号。这里“离散”是指信号的定义域——时间是离散的，它只取某些规定的值。就是说，离散信号是定义在一些离散时刻  $t_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots)$  上的信号，在其余的时间，信号没有定义。时刻  $t_n$  和  $t_{n+1}$  之间的间隔  $T_n = t_{n+1} - t_n$  可以是常数，也可以随  $n$  而变化，我们只讨论  $T_n$  等于常数的情况。若令相继时刻  $t_n$  与  $t_{n+1}$  之间的间隔为  $T$ ，则离散信号只在均匀离散时刻  $t = \cdots, -2T, -T, 0, T, 2T, \cdots$  时有定义，它可以表示为  $f(nT)$ 。为了方便，不妨把  $f(nT)$  简记为  $f(n)$ ，这样的离散信号也常称为序列。本书中序列与离散信号不加区别。

一个离散时间信号  $f(n)$  可以用以下三种方法来描述。

#### (1) 解析形式

解析形式(又称闭合形式或闭式)，即用一个函数式表示。例如  $f_1(n) = 2(-1)^n$ ,  $f_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 。

#### (2) 序列形式

序列形式即将  $f(n)$  表示成按  $n$  逐个递增的顺序排列的一列有顺序的数。例如

$$f_1(n) = \{\cdots, -2, \underset{\uparrow}{2}, -2, 2, \cdots\}, \quad f_2(n) = \left\{\cdots, 2, \underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\right\}$$

序列下面的  $\uparrow$  标记出  $n = 0$  的位置。

序列形式有时也表示为另一种形式，即在大括号的右下脚处标出第一个样值点对应的序号  $n$  的取值。这种表示形式比较适合有始序列。例如

$$f_3(n) = \left\{-1, 1, \frac{1}{2}, 2, -1, \frac{1}{2}\right\}_{-2}, \quad f_4(n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots\right\}_0$$

#### (3) 图形形式

图形形式即信号的波形。例如上面  $f_1(n)$  和  $f_3(n)$  分别如图 5-1(a) 和(b) 所示。

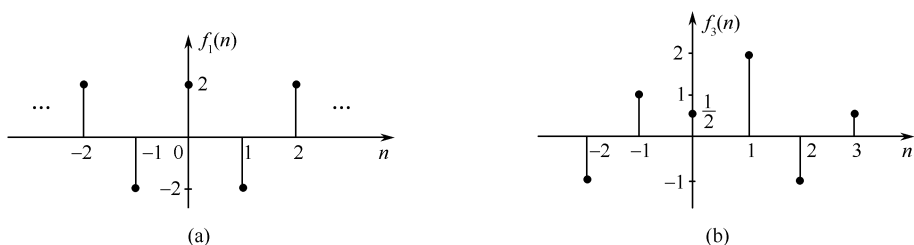


图 5-1 离散信号的波形

### 5.1.2 典型的离散信号

(1) 单位样值(Unit Sample) 信号  $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \quad (5-1)$$

$\delta(n)$  的波形如图 5-2(a) 所示。

此序列只在  $n = 0$  处取单位值 1, 其余样点上都为零。 $\delta(n)$  也称为“单位取样”、“单位函数”、“单位脉冲”或“单位冲激”。 $\delta(n)$  对于离散系统分析的重要性, 类似于  $\delta(t)$  对于连续系统分析的重要性, 但  $\delta(t)$  是一种广义函数, 可理解为在  $t = 0$  处脉宽趋于零, 幅度为无限大的信号; 而  $\delta(n)$  则在  $n = 0$  处具有确定值, 其值等于 1。

发生在  $n = m$  和  $n = -m$  的单位样值信号分别表示为

$$\delta(n - m) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \quad (5-2)$$

$$\delta(n + m) = \begin{cases} 0, & n \neq -m \\ 1, & n = -m \end{cases} \quad (5-3)$$

它们的波形分别如图 5-2(b) 和(c) 所示。

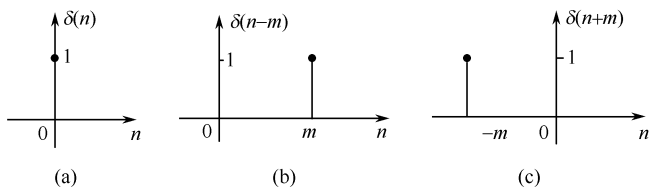


图 5-2  $\delta(n)$ ,  $\delta(n - m)$  和  $\delta(n + m)$  的波形

(2) 单位阶跃序列  $U(n)$

$$U(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (5-4)$$

$U(n)$  的波形如图 5-3(a) 所示。

像  $U(n)$  这样的信号, 只在  $n \geq 0$  才有非零值, 称为因果信号或因果序列; 而只在  $n < 0$  才有非零值的信号, 称为反因果序列; 只在  $n_1 \leq n \leq n_2$  才有非零值的信号, 称为有限长序列。相应地, 移位(延时) 单位阶跃序列  $U(n - m)$  定义为

$$U(n-m) = \begin{cases} 1 & n \geq m \\ 0 & n < m \end{cases} \quad (5-5)$$

$U(n-m)$  的波形如图 5-3(b) 所示。

(3) 矩形序列  $G_N(n)$

$$G_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (5-6)$$

$G_N(n)$  的波形如图 5-4 所示。

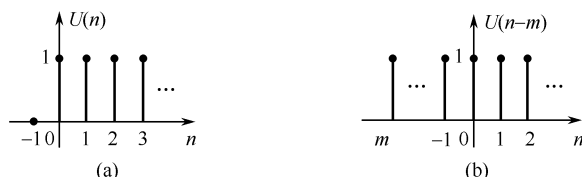


图 5-3  $U(n)$  和  $U(n-m)$  ( $m < 0$ ) 的波形

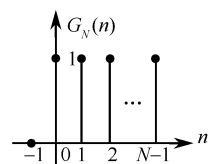


图 5-4  $G_N(n)$  的波形

以上三种序列之间有如下关系：

$$U(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (5-7)$$

$$\delta(n) = U(n) - U(n-1) \quad (5-8)$$

$$G_N(n) = U(n) - U(n-N) \quad (5-9)$$

(4) 单边指数序列  $a^n U(n)$

$$f(n) = a^n U(n) \quad (5-10)$$

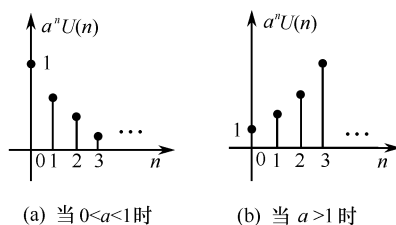


图 5-5  $a^n U(n)$  的波形

$a^n U(n)$  的波形如图 5-5 所示。

此外,还有因果斜升序列  $nU(n)$ , 正弦(余弦)序列  $\sin \omega_0 n$  或  $\cos \omega_0 n$  等。

### 5.1.3 离散信号的基本运算

(1) 信号相加(减)

两信号相加(减),将两信号的对应样点值相加(减)即可。例如

$$G_N(n) = U(n) - U(n-N), \quad U(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

(2) 信号相乘(除)

两信号相乘(除),将各信号的对应样点值相乘(除)即可。例如任一因果信号可表示成  $f(n)U(n)$ 。

(3) 信号移位

设  $m > 0$ , 则  $f(n-m)$  是原信号  $f(n)$  逐项右移  $m$  位得到的信号,  $f(n+m)$  是原信号  $f(n)$  逐项左移  $m$  位得到的信号,如图 5-6 所示。

显然,任何离散信号  $f(n)$  都可以看成由  $\delta(n)$  的移位相加所构成的,即

$$f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) \delta(n-m) \quad (5-11)$$

这正是离散信号的脉冲分解形式。

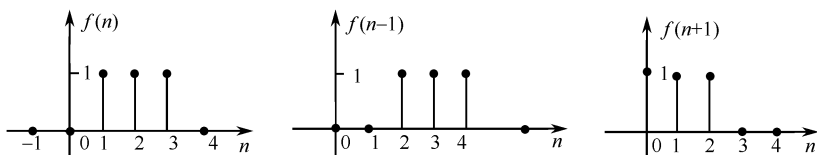


图 5-6 信号移位的例子

【例 5-1】 设  $f(n) = \{-1, 2, 2, 3\}_{-1}$ , 用  $\delta(n)$  及其移位信号表示  $f(n)$ 。

解: 由式(5-11) 并观察  $f(n)$  的构成, 即得

$$f(n) = -\delta(n+1) + 2\delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2)$$

#### (4) 信号展缩

因为离散信号的自变量限制为整数, 所以其展缩运算与连续信号差别很大, 下面举例说明。

【例 5-2】 若  $f(n) = G_4(n)$ , 求  $f(\frac{1}{2}n)$  和  $f(2n)$ 。

解: 由于 
$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 
$$f\left(\frac{1}{2}n\right) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2}n = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

即 
$$f\left(\frac{1}{2}n\right) = \begin{cases} 1, & n = 0, 2, 4, 6 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

而 
$$f(2n) = \begin{cases} 1, & 2n = 0, 1, 2, 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因为  $n$  只能取整数值, 所以

$$f(2n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$f(n)$ ,  $f(\frac{1}{2}n)$  和  $f(2n)$  的波形如图 5-7(a), (b) 和 (c) 所示。

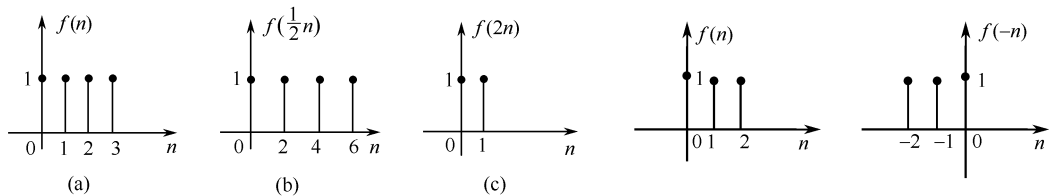


图 5-7 例 5-2 的图

图 5-8 信号  $f(n)$  翻转的例子

#### (5) 信号反折(翻转)

信号的反折是原信号以纵轴为对称轴翻转  $180^\circ$  所得的信号, 如图 5-8 所示。

### 5.1.4 离散系统响应的求解方法

LTI 离散系统用常系数线性差分方程描述,要求出系统响应,便要解此差分方程。一个  $N$  阶离散系统的差分方程的一般形式可表示为

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_N y(n-N) = b_0 f(n) + b_1 f(n-1) + \cdots + b_M f(n-M)$$

$$\text{或} \quad y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{l=0}^M b_l f(n-l) \quad (5-12)$$

式中,  $a_k, b_l$  为常数,  $N$  和  $M$  中的大者称为此差分方程的阶数,也称为系统的阶数。

求解此方程一般有以下几种方法。

#### (1) 迭代法

迭代法包括手算逐次代入求解或利用计算机求解。这种方法概念清楚,也比较简单,但一般只能得到其数值解,不能直接给出一个完整的解析式。

**【例 5-3】** 已知  $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}f(n)$ ,  $f(n) = \delta(n)$ ,  $y(-1) = 0$ , 求  $y(n)$ 。

**解:**用迭代法。

$$n = 0 \text{ 时} \quad y(0) = \frac{1}{2}y(-1) + \frac{1}{2}f(0) = \frac{1}{2}\delta(0) = \frac{1}{2}$$

$$n = 1 \text{ 时} \quad y(1) = \frac{1}{2}y(0) + \frac{1}{2}f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$n = 2 \text{ 时} \quad y(2) = \frac{1}{2}y(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

⋮

$$\text{所以} \quad y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \quad n \geq 0$$

#### (2) 时域经典法

与微分方程的时域经典法类似,先分别求出差分方程的齐次解和特解,然后代入边界条件求待定系数。这种方法便于从物理概念说明各响应分量之间的关系,但求解过程比较烦琐,在解决具体问题时不宜采用。表 5-1 和表 5-2 分别给出了差分方程齐次解和特解的一般形式。

表 5-1 不同特征根所对应的齐次解

特征根 $\lambda$	齐次解 $y_h(n)$
单实根	$C\lambda^n$
$r$ 重实根	$(C_{r-1}n^{r-1} + C_{r-2}n^{r-2} + \cdots + C_1n + C_0)\lambda^n$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = a + jb = \rho e^{\pm j\theta}$	$\rho^n [C\cos(\beta n) + D\sin(\beta n)]$ 或 $A\rho^n \cos(\beta n - \theta)$ 其中 $Ae^{j\theta} = C + jD$
$r$ 重共轭复根	$\rho^n [A_{r-1}n^{r-1}\cos(\beta n - \theta_{r-1}) + A_{r-2}n^{r-2}\cos(\beta n - \theta_{r-2}) + \cdots + A_0\cos(\beta n - \theta_0)]$

表 5-2 不同激励所对应的特解

激励 $f(n)$	特解 $y_p(n)$
$n^m$	$P_m n^m + P_{m-1} n^{m-1} + \cdots + P_1 n + P_0$ $n^r [P_m n^m + P_{m-1} n^{m-1} + \cdots + P_1 n + P_0]$ 所有特征根均不等于 1 时 当有 $r$ 重等于 1 的特征根时
$a^n$	$Pa^n$ $(Pn + P_0)a^n$ $[P_r n^r + P_{r-1} n^{r-1} + \cdots + P_1 n + P_0]a^n$ 当 $a$ 不等于特征根时 当 $a$ 是特征单根时 当 $a$ 是 $r$ 重特征根时
$\cos(\beta n)$ 或 $\sin(\beta n)$	$P\cos(\beta n) + Q\sin(\beta n)$ 或 $A\cos(\beta n - \theta)$ , 其中 $Ae^{j\theta} = P + jQ$ 所有特征根均不等于 $e^{\pm j\theta}$



### (3) 分别求零输入响应和零状态响应

可以利用求齐次解的方法得到零输入响应,利用卷积和(简称卷积)的方法求零状态响应。与连续时间系统的情况类似,卷积方法在离散系统分析中占有十分重要的地位。这种方法也叫时域法。

### (4) 变换域方法

类似于连续时间系统分析中的拉氏变换方法,利用 $z$ 变换方法解差分方程有许多优点,这是实际应用中简便而有效的方法。

本章重点介绍时域法解差分方程,下一章将详细研究 $z$ 变换方法。

## 5.2 离散系统的零输入响应

LTI 离散系统的响应 $y(n)$ 也可分解为零输入响应和零状态响应之和。零输入响应是激励为零时仅由初始状态引起的响应,用 $y_x(n)$ 表示。

在零输入条件下,式(5-12)等号右端均为零,化为齐次方程,即

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = 0 \quad (5-13)$$

因此零输入响应与差分方程的齐次解具有相同的形式。式 5-13 的特征方程为

$$\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \cdots + a_{N-1} \lambda + a_N = 0 \quad (5-14)$$

特征方程的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ 称为差分方程的特征根。

当特征根均不相同时,零输入响应(或齐次解)具有以下形式:

$$y_x(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \cdots + C_N \lambda_N^n = \sum_{i=1}^N C_i \lambda_i^n, \quad n \geq 0 \quad (5-15)$$

因为我们仅讨论因果系统在因果信号作用下的响应,故式(5-15)中响应的时间范围为 $n \geq 0$ 。

为了确定式(5-15)中的系数 $C_i$ ,设系统的初始条件为 $y_x(0), y_x(1), \cdots, y_x(N-1)$ ,代入式(5-15)中可得

$$\begin{aligned} y_x(0) &= C_1 + C_2 + \cdots + C_N \\ y_x(1) &= C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + \cdots + C_N \lambda_N \\ &\vdots \\ y_x(N-1) &= C_1 \lambda_1^{N-1} + C_2 \lambda_2^{N-1} + \cdots + C_N \lambda_N^{N-1} \end{aligned}$$

解此方程组,得

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_N \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_N^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_x(0) \\ y_x(1) \\ \vdots \\ y_x(N-1) \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

需要注意的是,初始条件 $y_x(0), y_x(1), \cdots, y_x(N-1)$ 是“零输入”条件下的一组初始值,与差分方程的边界条件 $y(0), y(1), \cdots, y(N-1)$ 不一定相同,有时需要通过式(5-12)和式(5-13)从给定的 $N$ 个边界条件求出 $y_x(0), y_x(1), \cdots, y_x(N-1)$ 。

当特征方程存在重根时,零输入响应(或齐次解)的形式将略有不同。假定 $\lambda_1$ 是特征方程(5-14)的 $r$ 重根,那么,在零输入响应中,相应于 $\lambda_1$ 的部分将有 $r$ 项:

$$(C_1 n^{r-1} + C_2 n^{r-2} + \cdots + C_{r-1} n + C_r) \lambda_1^n \quad (5-17)$$

$$\text{于是 } y_x(n) = (C_1 n^{r-1} + C_2 n^{r-2} + \cdots + C_{r-1} n + C_r) \lambda_1^n + C_{r+1} \lambda_2^n + \cdots + C_N \lambda_N^n, \quad n \geq 0 \quad (5-18)$$

其中,系数 $C_i$ 仍用式(5-16)求得。

**【例 5-4】** 已知一系统的差分方程为

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = f(n-1) - 3f(n-2)$$

$y_x(0) = 0, y_x(1) = 1$ , 求  $y_x(n)$ 。

**解:**特征方程为  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

解得特征根  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ , 是两不等的单根, 所以

$$y_x(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n = C_1 + C_2 2^n, \quad n \geq 0$$

代入初始条件计算  $C_1, C_2$ , 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_x(0) = 0 \\ C_1 + 2C_2 = y_x(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

所以

$$y_x(n) = -1 + 2^n, \quad n \geq 0$$

**【例 5-5】** 已知一系统的差分方程为

$$y(n+4) - 2y(n+3) + 2y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = f(n+2)$$

$y_x(1) = 1, y_x(2) = 0, y_x(3) = 1, y_x(5) = 1$ , 求  $y_x(n)$ 。

**解:**差分方程的特征方程为

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

解得特征根为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  (二重根),  $\lambda_3 = j, \lambda_4 = -j$ , 所以

$$y_x(n) = C_1 n \lambda_1^n + C_2 \lambda_1^n + C_3 \lambda_3^n + C_4 \lambda_4^n = C_1 n + C_2 + C_3 j^n + C_4 (-j)^n, \quad n \geq 0$$

代入初始值, 可以得到

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + j(C_3 - C_4) = y_x(1) = 1 \\ 2C_1 + C_2 - (C_3 + C_4) = y_x(2) = 0 \\ 3C_1 + C_2 - j(C_3 - C_4) = y_x(3) = 1 \\ 5C_1 + C_2 + j(C_3 - C_4) = y_x(5) = 1 \end{cases}$$

由此方程组解得

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = 1/2, \quad C_4 = 1/2,$$

所以  $y_x(n) = 1 + \frac{1}{2}[j^n + (-j)^n] = 1 + \frac{1}{2}(e^{j\frac{n\pi}{2}} + e^{-j\frac{n\pi}{2}}) = 1 + \cos(\frac{n\pi}{2}), \quad n \geq 0$

**【例 5-6】** 因果系统的差分方程为  $y(n) + 2y(n-1) = f(n)$ , 已知激励信号  $f(n) = U(n)$ , 且已知  $y(0) = -1$ , 求系统的零输入响应。

**解:**已知特征根为  $\lambda = -2$ , 所以

$$y_x(n) = C(-2)^n, \quad n \geq 0$$

因为  $n = 0$  时  $y(0) = -2y(-1) + f(0) = -2y(-1) + 1$

所以  $y_x(0) \neq y(0)$ 。为此, 先求出

$$y(-1) = \frac{1}{2}[f(0) - y(0)] = 1$$

当  $n = -1$  时,  $f(n) = 0$ , 故  $y_x(-1) = y(-1)$ 。根据齐次方程即可得到

$$y_x(0) = -2y_x(-1) = -2y(-1) = -2$$

将此“零输入”下的初始条件代入  $y_x(n)$ , 得  $C = y_x(0) = -2$ , 于是

$$y_x(n) = -2(-2)^n = (-2)^{n+1}, \quad n \geq 0$$

## 5.3 离散系统的单位样值响应

在连续 LTI 系统中, 单位冲激  $\delta(t)$  作用于系统引起的响应  $h(t)$  对于连续系统的分析非常重要, 对于离散 LTI 系统, 我们同样来考察单位样值信号  $\delta(n)$  作用于系统产生的零状态响应——单位样值响应。

### 1. 单位样值响应的定义

将激励信号为  $\delta(n)$  时系统的零状态响应称为单位样值响应, 用  $h(n)$  表示。这里顺便指出, 将激励为  $U(n)$  时系统的零状态响应称为单位阶跃响应, 用  $g(n)$  表示。 $h(n)$  与  $g(n)$  的示意图如图 5-9 所示。

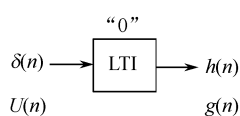


图 5-9 单位样值响应与单位阶跃响应

下面仅讨论因果离散 LTI 系统的单位样值响应。

### 2. 单位样值响应的求解

设  $N$  阶因果 LTI 系统的差分方程由式(5-12) 表示, 将之重写为

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{l=0}^M b_l(n-l)$$

令  $f(n) = \delta(n)$ , 则当  $n < 0$  时, 方程右端等于零, 即系统输入为零, 由系统的因果性可知, 此时的响应  $h(n)$  为零, 即  $h(n) = 0, n < 0, h(n)$  为因果信号。

先考虑以下系统的单位样值响应, 以  $h_1(n)$  表示。

$$y(n) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = f(n) \quad (5-19)$$

根据单位样值响应的定义,  $h_1(n)$  满足方程

$$h_1(n) + \sum_{k=1}^N a_k h_1(n-k) = \delta(n) \quad (5-20)$$

并且

$$h_1(-1) = h_1(-2) = \cdots = h_1(-N) = 0$$

当  $n = 0$  时,  $h_1(0) = -\sum_{k=1}^N a_k y(-k) + \delta(0) = 1$ ; 当  $n > 0$  时,  $\delta(n) = 0$ , 故式(5-20) 右端激励为零, 因此单位样值信号  $\delta(n)$  的作用等效为初始条件  $h_1(0)$ , 求解单位样值响应  $h_1(n)$  的问题转化为求系统的零输入响应。于是,  $h_1(n)$  可表示为

$$\begin{aligned} h_1(n) &= \sum_{i=1}^N C_i \lambda_i^n, \quad n \geq 0 \\ &= \left( \sum_{i=1}^N C_i \lambda_i^n \right) U(n) \end{aligned} \quad (5-21)$$

其中,  $\lambda_i$  是式(5-20)的  $N$  个特征单根, 如果存在重根, 则  $h_1(n)$  由式(5-18)给出。

最后, 根据 LTI 系统的线性与时不变特性, 由式(5-12)描述的因果 LTI 系统的单位样值响应为

$$h(n) = \sum_{k=0}^M b_k h_1(n-k) \quad (5-22)$$

**【例 5-7】** 已知某因果系统的差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = 2f(n-1) + f(n-2)$$

求该系统的单位样值响应  $h(n)$ 。

**解:** (1) 设  $h_1(n)$  为系统  $y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = f(n)$  的单位样值响应, 易知特征根  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ , 所以

$$h_1(n) = (C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n) U(n) = [C_1 (-1)^n + C_2 (-2)^n] U(n)$$

$$\text{初始条件为} \quad h_1(-1) = h_2(-2) = 0$$

$$\text{因此} \quad h_1(0) = -3h_1(-1) - 2h_1(-2) + \delta(0) = 1$$

$$h_1(1) = -3h_1(0) - 2h_1(-1) + \delta(1) = -3$$

由此得到求系数  $C_1, C_2$  的方程组

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 2C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{所以} \quad h_1(n) = [(-1)^{n+1} + 2(-2)^n] U(n)$$

(2) 根据线性时不变性质, 原系统的单位样值响应为

$$\begin{aligned} h(n) &= 2h_1(n-1) + h_1(n-2) \\ &= 2[(-1)^n + 2(-2)^{n-1}] U(n-1) + [(-1)^{n-1} + 2(-2)^{n-2}] U(n-2) \\ &= 0.5\delta(n) + (-1)^n U(n) - 1.5(-2)^n U(n) \end{aligned}$$

**【例 5-8】** 某因果系统差分方程式为  $y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = f(n)$ , 求系统的单位样值响应。

**解:** 系统的特征方程为  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ , 特征根  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 。于是可得

$$h(n) = (C_1 n + C_2) U(n)$$

由  $h(-1) = h(-2) = 0$ , 所以

$$h(0) = 2h(-1) - h(-2) + \delta(0) = 1$$

$$h(1) = 2h(0) - h(-1) + \delta(1) = 2$$

于是得到求系数  $C_1, C_2$  的方程为

$$\begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{因此} \quad h(n) = (n+1) U(n)$$

在连续时间系统中曾利用系统函数求拉氏逆变换的方法确定冲激响应  $h(t)$ , 与此类似, 在离散时间系统中, 也可利用系统函数求逆  $z$  变换来确定单位样值响应。一般情况下, 这是一种较为简便的方法, 将在第 6 章详述。

与  $h(t)$  类似,  $h(n)$  表征了系统自身的特性, 因此在时域分析中可以根据  $h(n)$  来判断系

统的某些重要特性,如因果性、稳定性,下面简要说明。

LTI 离散系统为因果系统的充分必要条件是

$$h(n) = 0, \quad \text{当 } n < 0 \text{ 时} \quad (5-23)$$

或表示为

$$h(n) = h(n)U(n) \quad (5-24)$$

对于离散系统,其稳定性的定义与连续系统是相同的,即:若输入是有界的,输出也必定是有界的系统。我们已经知道连续系统为稳定系统的充分必要条件是冲激响应  $h(t)$  绝对可积,对于离散系统,这一充分必要条件是单位样值响应绝对可和,即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M, \quad M \text{ 为有界正值} \quad (5-25)$$

## 5.4 离散系统的零状态响应 —— 卷积和

与连续系统类似,当系统初始状态为零,仅由输入  $f(n)$  所引起的响应称为零状态响应,用  $y_f(n)$  表示,如图 5-10 所示。

下面讨论 LTI 离散系统对任意输入的零状态响应。

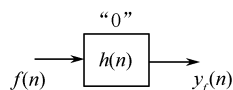


图 5-10 离散系统的零状态响应

### 5.4.1 卷积和

在 LTI 连续时间系统中,首先把激励信号分解为一系列冲激函数的叠加,然后求出各个冲激函数单独作用于系统时的响应,最后把这些响应叠加即可得到系统对该信号的零状态响应。这个叠加的过程表现为求卷积积分。在 LTI 离散系统中,可以采用大致相同的方法进行分析。由式(5-11)可知,任意离散信号均可分解为一系列移位样值信号的叠加。如果系统的单位样值响应已知,那么,由时不变性不难求得每个移位样值信号作用于系统的响应。把这些响应相加就得到系统对于该信号的零状态响应。这个相加过程表现为求“卷积和”。

将式(5-11)重写为

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m) \\ &= \cdots + f(-2)\delta(n+2) + f(-1)\delta(n+1) + f(0)\delta(n) + f(1)\delta(n-1) + \cdots \end{aligned} \quad (5-26)$$

因为  $\delta(n)$  作用下的零状态响应为  $h(n)$ , 表示为

$$\delta(n) \rightarrow h(n)$$

根据 LTI 系统的线性和时不变性,有

$$\begin{aligned} f(-2)\delta(n+2) &\rightarrow f(-2)h(n+2) \\ f(-1)\delta(n+1) &\rightarrow f(-1)h(n+1) \\ f(0)\delta(n) &\rightarrow f(0)h(n) \\ f(1)\delta(n-1) &\rightarrow f(1)h(n-1) \\ &\vdots \\ f(m)\delta(n-m) &\rightarrow f(m)h(n-m) \\ &\vdots \end{aligned}$$

所以 $f(n)$  激励下系统的零状态响应为

$$f(n) \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)h(n-m)$$

即

$$y_f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)h(n-m)$$

记

$$f(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)h(n-m) \quad (5-27)$$

则称式(5-27) 为 $f(n)$  与 $h(n)$  的卷积和,仍简称为卷积。于是得到

$$y_f(n) = f(n) * h(n) \quad (5-28)$$

这便是 LTI 离散系统在任意激励下零状态响应的时域计算公式,该式表明零状态响应等于激励信号和系统单位样值响应的卷积。对式(5-27) 进行变量置换可得到卷积和的另一种表示

$$y_f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m)h(m) = h(n) * f(n) \quad (5-29)$$

这表明,两序列进行卷积的次序是无关紧要的,可以互换。

卷积和公式(5-27) 可以推广至任意两个序列的情形,即任意两个序列 $f_1(n)$  和 $f_2(n)$  的卷积定义为

$$f(n) = f_1(n) * f_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m)f_2(n-m) \quad (5-30)$$

若记

$$W_n(m) = f_1(m)f_2(n-m)$$

式中, $m$  为自变量, $n$  看做常量,那么

$$f(n) = f_1(n) * f_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_n(m) \quad (5-31)$$

如果序列 $f_1(m)$  为因果序列,即有 $n < 0, f_1(n) = 0$ , 则式(5-30) 中求和下限可改写为零,于是

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{m=0}^{\infty} f_1(m)f_2(n-m) \quad (5-32)$$

如果 $f_1(n)$  不受限制,而 $f_2(n)$  为因果序列,那么式(5-31) 中,当 $n-m < 0$ ,即 $m > n$ 时, $f_2(n-m) = 0$ , 因而求和的上限可改写为 $n$ ,故

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{m=-\infty}^n f_1(m)f_2(n-m) \quad (5-33)$$

如果 $f_1(n), f_2(n)$  均为因果序列,则

$$\begin{aligned} f_1(n) * f_2(n) &= \sum_{m=0}^n f_1(m)f_2(n-m), \quad n \geqslant 0 \\ &= \left[ \sum_{m=0}^n f_1(m)f_2(n-m) \right] U(n) \end{aligned} \quad (5-34)$$

表明两因果序列的卷积仍为因果序列。

## 5.4.2 卷积和的性质

(1) 交换律

$$f_1(n) * f_2(n) = f_2(n) * f_1(n) \quad (5-35)$$

式(5-35) 说明,输入为 $f_1(n)$  而单位样值响应为 $f_2(n)$  的系统的响应,与输入为 $f_2(n)$  而

单位样值响应为  $f_1(n)$  的系统的响应完全一样。

## (2) 分配律

$$f_1(n) * [f_2(n) + f_3(n)] = f_1(n) * f_2(n) + f_1(n) * f_3(n) \quad (5-36)$$

式(5-36)可直接由卷积的定义证明(略)。卷积和的分配律说明,图 5-11(a) 所示的并联系统,可以用图 5-11(b) 所示的单个系统来等效,图 5-11(b) 的单位样值响应  $h(n)$ , 是图 5-11(a) 中并联的各子系统单位样值响应  $h_1(n)$  与  $h_2(n)$  之和。即

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$$

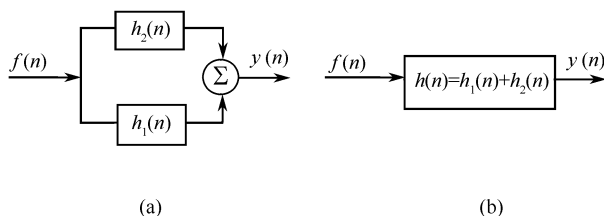


图 5-11 卷积和的分配律

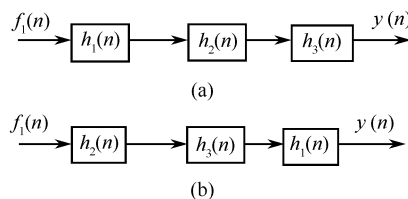


图 5-12 卷积和的结合律

## (3) 结合律

$$\begin{aligned} f(n) * f_2(n) * f_3(n) &= f_1(n) * \{f_2(n) * f_3(n)\} \\ &= f_2(n) * \{f_1(n) * f_3(n)\} \end{aligned} \quad (5-37)$$

结合律说明,一个级联的 LTI 离散系统,一般也可以随意交换级联的次序而不影响结果。图 5-12 正说明了这一点。因为

$$f_1(n) * h_1(n) * h_2(n) * h_3(n) = f_1(n) * h_2(n) * h_3(n) * h_1(n)$$

## (4) 序列与 $\delta(n)$ 的卷积

$$f(n) * \delta(n) = f(n) \quad (5-38)$$

同样

$$f(n) * \delta(n - m) = f(n - m) \quad (5-39)$$

## (5) 移不变性

若

$$f_1(n) * f_2(n) = y(n)$$

则

$$f_1(n - m) * f_2(n + k) = y(n - m + k) \quad (5-40)$$

## (6) 序列与单位阶跃序列的卷积

$$f(n) * U(n) = \sum_{m=-\infty}^n f(m) \quad (5-41)$$

证明: 根据卷积和的定义有

$$f(n) * U(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) * U(n - m) = \sum_{m=-\infty}^n f(m) * U(n - m) = \sum_{m=-\infty}^n f(m)$$

特别地,若  $f(n)$  为因果序列时

$$f(n) * U(n) = \left[ \sum_{m=0}^n f(m) \right] U(n)$$

## 5.4.3 卷积和的计算

在计算两序列的卷积时,除了利用卷积的定义来计算之外,一般有以下四种方法。

## 1. 图解法

利用式(5-30) 计算卷积时,参变量  $n$  的不同取值往往会使实际的求和上、下限发生变化。因此,正确划分  $n$  的不同区间并确定相应的求和上、下限是十分关键的步骤。这可以借助作图的方法解决,故称为图解法。图解法计算  $f_1(n)$  与  $f_2(n)$  卷积的过程如下。

(1) 以  $m$  为自变量作出  $f_1(m)$  和  $f_2(n-m)$  的信号波形。其中  $f_2(n-m)$  是先将  $f_2(m)$  反折得到  $f_2(-m)$ ,然后将  $f_2(-m)$  平移  $n$  得到的( $n > 0$  时,  $f_2(-m)$  向右移  $n$  个单位;  $n < 0$  时,  $f_2(-m)$  向左移  $|n|$  个单位)。

(2) 从负无穷处(即  $n = -\infty$ ) 将  $f_2(n-m)$  逐渐向右移动,根据  $f_2(n-m)$  与  $f_1(m)$  波形重叠的情形划分  $n$  的不同区间,确定各区间上  $W_n(m)$  的表达式以及相应的求和上、下限。

(3) 对每个区间,将相应的  $W_n(m)$  对  $m$  求和,得到该区间的卷积和  $f(n)$ 。

**【例 5-9】** 已知  $f(n) = U(n-1) - U(n-8)$ ,  $h(n) = \frac{1}{2}[U(n) - U(n-3)]$ , 求  $y(n) = f(n) * h(n)$ 。

**解:** 用图解法。

(1) 作出  $f(m)$  和  $h(n-m)$  的波形如图 5-13(a) 所示。

(2) 当  $n < 1$  时,  $W_n(m) = 0$ , 故  $y(n) = 0$ , 如图 5-13(b) 所示。

(3) 当  $1 \leq n < 3$  时,  $W_n(m)$  的表达式为

$$W_n(m) = \begin{cases} 1/2, & 1 \leq m \leq n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以

$$y(n) = \sum_{m=1}^n W_n(m) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$$

波形如图 5-13(c) 所示。

(4) 当  $3 \leq n < 8$  时,  $W_n(m)$  的表达式为

$$W_n(m) = \begin{cases} 1/2, & n-2 \leq m \leq n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以

$$y(n) = \sum_{m=n-2}^n W_n(m) = \sum_{m=n-2}^n \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

波形如图 5-13(d) 所示。

(5) 当  $8 \leq n \leq 9$  时,  $W_n(m)$  的表达式为

$$W_n(m) = \begin{cases} 1/2, & n-2 \leq m \leq 7 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以

$$y(n) = \sum_{m=n-2}^7 W_n(m) = \sum_{m=n-2}^7 \frac{1}{2} = \frac{10-n}{2}$$

波形如图 5-13(e) 所示。

(6) 当  $n > 9$  时,  $W_n(m) = 0$ , 故  $y(n) = 0$ 。

将上述结果综合起来,得

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n < 1 \text{ 或 } n > 9 \\ \frac{1}{2}n, & 1 \leq n < 3 \\ 3/2, & 3 \leq n < 8 \\ \frac{1}{2}(10-n), & 8 \leq n \leq 9 \end{cases}$$



Figure 1.10 consists of six subplots labeled (a) through (f), each showing a discrete-time signal as a stem plot.

- (a) Two plots. The top plot shows  $f(m)$  with a value of 1 for  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  and 0 elsewhere. The bottom plot shows  $h(n-m)$  with a value of  $1/2$  for  $m = 0, n-2, n$  and 0 elsewhere.
- (b) Two plots. The left plot shows  $h(n-m)$  with a value of  $1/2$  for  $m = n-2, n$  and 0 elsewhere. The right plot shows  $f(m)$  with a value of 1 for  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$  and 0 elsewhere.
- (c) A plot of  $W_n(m)$  with a value of  $1/2$  for  $m = 0, 1, n$  and 0 elsewhere. Ellipses indicate that the signal is zero for  $m = 2, 3, \dots, n-1$ .
- (d) A plot of  $W_n(m)$  with a value of  $1/2$  for  $m = 0, n-2, n$  and 0 elsewhere.
- (e) A plot of  $W_n(m)$  with a value of  $1/2$  for  $m = 0, n-2, n$  and 0 elsewhere. Ellipses indicate that the signal is zero for  $m = 1, 2, \dots, n-1$ .
- (f) A plot of  $y(n)$  with values  $1/2$  for  $n = 1, 3, 5, 7, 9$  and  $3/2$  for  $n = 2, 4, 6, 8$ . The signal is zero for  $n = 0$  and  $n \geq 10$ .

## 2. 竖乘法(对位相乘求和)

$$f(n) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}_1, \quad h(n) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}_0$$
[illegible]
$$y(n) = \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2} \right\},$$

• 160 •

### 3. 利用性质

将两信号分别用  $\delta(n)$  的移位加权和来表示,再利用卷积和的性质来计算。仍以【例 5-9】所给定的信号说明这种方法的计算过程。

$$f(n) \text{ 可以表示为 } f(n) = \delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots + \delta(n-7)$$

$$h(n) \text{ 可以表示为 } h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } y(n) &= [\delta(n-1) + \delta(n-2) + \cdots + \delta(n-7)] * [\frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)] \\ &= \frac{1}{2}\delta(n-1) + \delta(n-2) + \frac{3}{2}\delta(n-3) + \frac{3}{2}\delta(n-4) + \frac{3}{2}\delta(n-5) + \\ &\quad \frac{3}{2}\delta(n-6) + \frac{3}{2}\delta(n-7) + \delta(n-8) + \frac{1}{2}\delta(n-9) \end{aligned}$$

### 4. 变换域方法

将时域卷积转换成  $z$  域相乘的方法计算卷积和。这个内容将在第 6 章讨论。

## 5.5 离散系统响应的时域分析

LTI 离散系统的时域分析是将响应分解为零输入响应  $y_x(n)$  和零状态响应  $y_f(n)$  之和,分别求出系统的  $y_x(n)$  和  $y_f(n)$ ,两者相加即为系统的全响应。即

$$y(n) = y_x(n) + y_f(n) \quad (5-42)$$

其中

$$y_x(n) = \sum_{i=1}^N C_i \lambda_i^n \quad (\text{差分方程特征根均为单根时})$$

$$y_f(n) = f(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) h(n-m)$$

下面举例说明时域分析的过程。

【例 5-10】 已知因果系统的差分方程为  $y(n) - 2.5y(n-1) + y(n-2) = f(n)$ , 且  $y(-1) = 2$ ,  $y(-2) = -1$ 。求  $f(n) = U(n)$  时系统的全响应。

解: (1) 求  $y_x(n)$ 。

易知特征方程为  $\lambda^2 - 2.5\lambda + 1 = 0$ , 解得特征根  $\lambda_1 = 0.5$ ,  $\lambda_2 = 2$ , 所以

$$y_x(n) = C_1 (0.5)^n + C_2 2^n, \quad n \geq 0$$

因为  $y_x(n)$  的表达式只适用于  $n \geq 0$ , 而题设初始条件为  $y(-1)$ ,  $y(-2)$ , 故先由齐次差分方程用迭代法求出  $y_x(0)$  和  $y_x(1)$ , 再代入上式求  $C_1$  和  $C_2$ 。

因为  $n < 0$  时  $f(n) = 0$ , 所以  $y_x(-1) = y(-1) = 2$ ,  $y_x(-2) = y(-2) = -1$ , 由齐次差分方程可得

$$y_x(0) = 2.5y_x(-1) - y_x(-2) = 6$$

$$y_x(1) = 2.5y_x(0) - y_x(-1) = 13$$

代入  $y_x(n)$  表达式中, 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_x(0) = 6 \\ 0.5C_1 + 2C_2 = y_x(1) = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2/3 \\ C_2 = 20/3 \end{cases}$$

故

$$y_x(n) = -\frac{2}{3}(0.5)^n + \frac{20}{3}2^n, \quad n \geq 0$$

(2) 求  $y_f(n)$ 。

首先求单位样值响应  $h(n)$ 。由差分方程可知  $h(n)$  与  $y_x(n)$  有相同的函数形式, 所以

$$h(n) = C_1(0.5)^n + C_22^n, \quad n \geq 0$$

因为  $h(n)$  是零状态响应, 所以  $h(-1) = h(-2) = 0$ , 从而

$$h(0) = 2.5h(-1) - h(-2) + \delta(0) = 1$$

$$h(1) = 2.5h(0) - h(-1) + \delta(1) = 2.5$$

代入  $h(n)$  的表达式, 有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 0.5C_1 + 2C_2 = 2.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1/3 \\ C_2 = 4/3 \end{cases}$$

所以

$$h(n) = \left[ -\frac{1}{3}(0.5)^n + \frac{4}{3}2^n \right] U(n)$$

于是  $y_f(n) = f(n) * h(n) = \left[ \sum_{m=0}^n -\frac{1}{3}(0.5)^m + \frac{4}{3}2^m \right] U(n)$  (利用式(5-34))

利用等比数列求和公式可得

$$\begin{aligned} y_f(n) &= \left\{ -\frac{1}{3} \left[ \frac{1 - (0.5)^{n+1}}{1 - 0.5} \right] + \frac{4}{3} \left[ \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right] \right\} U(n) \\ &= \left[ \frac{1}{3}(0.5)^n + \frac{8}{3}2^n - 2 \right] U(n) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } y(n) = y_x(n) + y_f(n) = \left[ -\frac{1}{3}(0.5)^n + \frac{28}{3}2^n - 2 \right] U(n)$$

**【例 5-11】** 已知因果系统的差分方程为  $y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = f(n)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 2$ ,  $f(n) = 2^n U(n)$ , 求  $y(n)$ 。

**解:** (1) 求  $y_x(n)$ 。

易求得特征根  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ , 故

$$y_x(n) = C_1(-1)^n + C_2(-2)^n, \quad n \geq 0 \quad \text{①}$$

本例中  $y_x(0) \neq y(0)$ ,  $y_x(1) \neq y(1)$ , 因此不能将  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 2$  代入  $y_x(n)$  中求  $C_1$  和  $C_2$ 。要求  $C_1$  和  $C_2$ , 必须求出  $y_x(n)$  的两个初始条件。

因为

$$\begin{cases} y(0) + 3y(-1) + 2y(-2) = f(0) = 1 \\ y(1) + 3y(0) + 2y(-1) = f(1) = 2 \end{cases}$$

将  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 2$  代入上述方程组, 可解得

$$y(-1) = 0, \quad y(-2) = 1/2$$

因为  $n < 0$  时,  $f(n) = 0$ , 故此时  $y_x(-1) = y(-1) = 0$ ,  $y_x(-2) = y(-2) = 1/2$ , 代入式①中, 得

$$\begin{cases} -C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 0 \\ C_1 + \frac{1}{4}C_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

则 
$$y_x(n) = (-1)^n + (-2)^{n+1}, \quad n \geq -2 \quad (2)$$

从严格意义上讲,  $y_x(n)$  应为式②, 但为了方便, 往往将  $y_x(n)$  限定为  $n \geq 0$ 。故

$$y_x(n) = (-1)^n + (-2)^{n+1}, \quad n \geq 0$$

(2) 求  $y_f(n)$ 。

先计算单位样值响应  $h(n)$ 。易知  $h(n)$  具有以下形式

$$h(n) = [C_1(-1)^n + C_2(-2)^n]U(n)$$

而初始条件

$$h(-1) = h(-2) = 0$$

由差分方程可得

$$h(0) = -3h(-1) - 2h(-2) + \delta(0) = 1$$

$$h(1) = -3h(0) - 2h(-1) + \delta(1) = -3$$

代入  $h(n)$  的表达式, 得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 - 2C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

所以

$$h(n) = [(-1)^{n+1} + 2(-2)^n]U(n)$$

于是

$$\begin{aligned} y_f(n) &= f(n) * h(n) = \left\{ \sum_{m=0}^n 2^m [ -(-1)^{n-m} + 2(-2)^{n-m} ] \right\} U(n) \\ &= \left\{ (-1)^{n+1} \left[ \frac{1 - (-2)^{n+1}}{1 + 2} \right] + 2(-2)^n \left[ \frac{1 - (-1)^{n+1}}{1 + 1} \right] \right\} U(n) \\ &= \left[ -\frac{1}{3}(-1)^n + (-2)^n + \frac{1}{3}2^n \right] U(n) \end{aligned}$$

所以

$$y(n) = y_x(n) + y_f(n) = \left[ \frac{2}{3}(-1)^n - (-2)^n + \frac{1}{3}2^n \right] U(n)$$

**【例 5-12】** 已知因果系统的差分方程为  $y(n) - 2y(n-1) = f(n-1)$ , 求  $f(n) = U(n+1) - U(n-2)$  作用下系统的零状态响应。

**解:** 设系统  $y(n) - 2y(n-1) = f(n)$  的单位样值响应为  $h_1(n)$ , 则

$$h(n) = h_1(n-1)$$

易知

$$h_1(n) = C(2)^n U(n)$$

$$h_1(-1) = 0, \quad h_1(0) = 2h_1(-1) + \delta(0) = 1$$

代入  $h_1(n)$  得  $C = 1$ , 于是

$$h_1(n) = 2^n U(n)$$

从而

$$h(n) = h_1(n-1) = 2^{n-1} U(n-1)$$

所以

$$y_f(n) = f(n) * h(n) = 2^{n-1} U(n-1) * [U(n+1) - U(n-2)]$$

令

$$y_1(n) = 2^n U(n) * U(n)$$

则

$$y_1(n) = \left[ \sum_{m=0}^n 2^m \right] U(n) = \left[ \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right] U(n) = (2^{n+1} - 1) U(n)$$

由卷积的时不变性质可得

$$\begin{aligned} y_f(n) &= y_1(n) - y_1(n-3) = (2^{n+1} - 1) U(n) - (2^{n-2} - 1) U(n-3) \\ &= \begin{cases} 2^{n+1} - 1, & 0 \leq n < 3 \\ \frac{7}{4} 2^n, & n \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

## 5.6 MATLAB 应用举例

### 5.6.1 用 MATLAB 表示离散序列

在 MATLAB 中,有限长序列用行向量或列向量来表示,然而这样的一个向量并没有包含序列样值的位置信息。因此,要准确表示序列,应该用两个向量,一个表示序列的样本值,另一个表示样本的位置(序号)。例如,序列  $f(n) = \{2, 1, -1, 0, 1, 5, 2, 4\}_{-5}$ ,在 MATLAB 中需要用以下两个向量来表示:

$n = [-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2]$ ,表示序号,称为位置向量;

$f = [2, 1, -1, 0, 1, 5, 2, 4]$ ,表示序列的样本,称为样本向量。

当不需要位置信息或者序列从  $n=0$  开始时,可以只用样本向量来表示。由于计算机内存的限制,MATLAB 无法表示无限长序列,只能用其截短形式来近似。下面举例说明用 MATLAB 产生一些常用序列的方法。

#### 1. 单位样值序列

利用 MATLAB 可以实现有限区间上的  $\delta(n)$  或  $\delta(n - n_0)$ 。可以用下面的函数来实现:

```
function [x,n] = deltaN(n1,n2,n0)
% Generate delta(n - n0); n1 <= n0 <= n2;
if nargin < 3
    n0 = 0;
end
if n1 >= n2
    error('n1 must less than n2!');
end
n = n1:n2;
x = [n == n0];
if nargin < 1
    stem(n,x,'MarkerSize',4,'MarkerFace','k');
    box off;
end
```

#### 2. 单位阶跃序列

可以用如下函数产生在区间  $[n_1, n_2]$  上的阶跃序列。

```
function [x,n] = stepN(n1,n2,n0)
% Generate U(n - n0), starting from n0; n1 <= n <= n2;
if nargin < 3
    n0 = 0;
end
```

```

end
n = n1:n2;
x = [n >= n0];
if nargin < 1
    stem(n,x,'MarkerSize',4,'MarkerFace','k');
    box off;
end

```

## 5.6.2 离散信号运算的 MATLAB 实现

### 1. 序列相加

序列的相加运算是指对应样本的相加,如果两序列长度不等或位置向量不同,则不能用算术运算符“+”直接实现,需要对位置向量和序列长度做统一处理后方可相加。任意两个序列的相加可以用以下函数实现。

```

function [y,n] = sigadd(f1,n1,f2,n2)
% [y n] = sigadd(f1,n1,f2,n2),Add two sequences.
% Inputs:
% f1 ----the first sequence
% n1 ----index vector of the first sequence
% f2 ----the second sequence
% n2 ----index vector of the second sequence
% Outputs:
% y ----the output sequence
% n ----index vector of the output sequence

n = min(n1(1),n2(1)):max(n1(end),n2(end));% index vector of y(n)
y1 = zeros(1,length(n));y2 = y1;% initialization
y1(n >= n1(1) & n <= n1(end))=f1;
y2(n >= n2(1) & n <= n2(end))=f2;
y = y1 + y2;

```

### 2. 序列的移位

序列移位后,样本向量并没有变化,只是位置向量变了。任意序列的移位可以用以下函数实现。

```

function [y,n] = sigshift(x,m,n0)
% [y,n] = sigshift(x,m,n0),result of y = x(n - n0);
% Inputs:
% x ----sequence to be shifted
% m ----the index vector of x
% n0 ---shift amount of x
% Outputs:
% y ----the output sequence

```

```
% n ----the index vector of y
y = x;
n = m + n0;
```

### 3. 序列的反折

序列反折运算  $y(n)=f(-n)$  可以用以下函数实现。

```
function [y,n] = sigfold(x,n)
% y(n)=x(-n);
y = fliplr(x);
n = -fliplr(n);
```

### 5.6.3 离散系统单位样值响应的求解

MATLAB 函数 `impz` 用来求解离散系统的单位样值响应,其一般调用格式为

```
[H,T] = impz(b,a,N)
```

其中,H 是系统单位样值响应,T 是 H 的位置向量,a 和 b 分别是系统差分方程左、右端的系数向量,N 为正整数或向量。若 N 为正整数,则  $T=0:N-1$ ; 若 N 为向量,则  $T=N$ 。

**【例 5-13】** 已知因果系统的差分方程为

$$y(n) - 1.4y(n-1) + 0.48y(n-2) = 2f(n)$$

求系统单位样值响应  $h(n)$ ,并画图与理论值比较。

**解:** 首先可求得  $h(n)$  的理论值为

$$h(n) = 8(0.8)^n - 6(0.6)^n, \quad n \geq 0$$

用 MATLAB 求  $h(n)$  的程序如下。其结果如图 5-14 所示。

```
% Program ch5_1
b = 2;
a = [1 -1.4 0.48];
n = 0:15;
h = impz(b,a,n);
hk = 8*0.8.^n - 6*0.6.^n;
subplot(2,1,1);
stem(n,hk,'MarkerSize',4,'MarkerFace','k');
title('theoretical value of h(n)');
xlabel('n');
ylabel('h(n)');
box off;
subplot(2,1,2);
stem(n,h,'MarkerSize',4,'MarkerFace','k');
title('h(n) computed by MATLAB');
xlabel('n');
ylabel('h(n)');
box off;
```

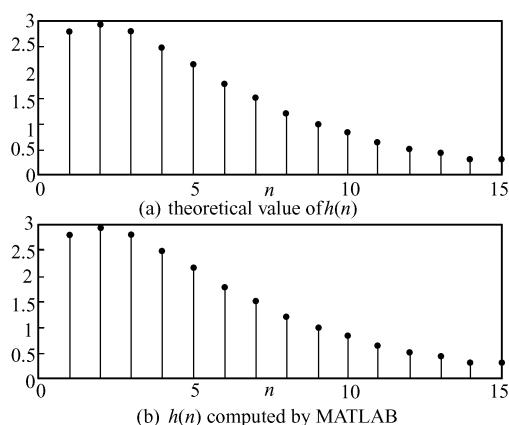


图 5-14 例 5-13 的图

#### 5.6.4 离散系统零状态响应的求解

MATLAB 中的函数 `filter` 可以用来计算离散系统的零状态响应,其一般调用格式为

$$y = \text{filter}(b,a,x)$$

其中,  $x$  是系统输入信号序列,  $y$  是与  $x$  等长的零状态响应,  $a$  和  $b$  分别是差分方程左、右两端的系数向量。

【例 5-14】 已知系统差分方程为

$$y(n) - 0.9y(n-1) = f(n), \quad f(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)U(n)$$

求系统的零状态响应并绘图表示。

解: 求解的程序如下。波形如图 5-15 所示。

```
% Program ch5_2
b = 1;
a = [1 -0.9];
n = 0:30;
f = cos(pi * n/3);
y = filter(b,a,f);
stem(n,y,'MarkerSize',4,'MarkerFace','k');
title('zero - state response of  $y(n) - 0.9y(n-1) = f(n)$ ');
xlabel('n');
box off;
```

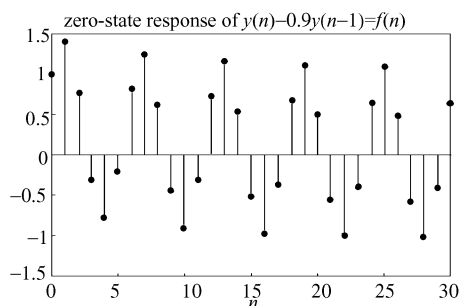


图 5-15 例 5-14 的图

## 本章关键概念小结

- 单位样值信号在离散系统分析中所起的作用与单位冲激信号在连续系统分析中所起的作用类似。
- 任何离散信号都可以看成  $\delta(n)$  的移位加权和。
- 通过求解系统差分方程,可以得到在给定输入信号、给定初始条件下系统的响应。
- 系统的零输入响应是输入信号为零、仅由初始状态引起的响应;零状态响应是初始状



态为零、完全由输入信号产生的响应；LTI 离散系统的全响应等于零输入响应与零状态响应之和。

- 系统的单位样值响应是单位样值信号作用下系统的零状态响应。
- 单位样值响应与零输入响应具有相同的模式，激励信号等效为初始状态。
- 如果系统单位样值响应在  $n < 0$  时满足  $h(n) = 0$ ，那么该系统是因果的；如果单位样值响应绝对可和，则系统是稳定的。
- 系统的零状态响应等于输入信号与单位样值响应的卷积(和)。
- 卷积满足交换律、结合律及分配律。
- 卷积的计算通常有图解法、竖乘法、利用性质和变换域方法。
- 时域分析法求系统响应的过程是：先求零输入响应  $y_x(n)$ ，它取决于差分方程的特征根与初始状态；然后求单位样值响应  $h(n)$ ，将输入信号  $f(n)$  与  $h(n)$  卷积得到零状态响应  $y_f(n)$ ；最后将零输入响应与零状态响应相加，即得全响应  $y(n) = y_x(n) + y_f(n)$ 。

## 习题

5.1 试用归纳法写出下列序列的闭式。

(1)  $f(n) = \{-2, -1, 2, 7, 14, 23, \dots\}_0$  (2)  $f(n) = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}_0$

(3)  $f(n) = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \dots\right\}_0$  (4)  $f(n) = \{0, 2, 8, 24, 64, 160, \dots\}_0$

5.2 试画出下列离散信号的波形，并判断是否是周期信号，若是，则求出其周期。

(1)  $\sin \frac{n}{2} - \sin \frac{n\pi}{2}$  (2)  $\cos \frac{n\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8}(n+1)$  (3)  $\sin^2 \frac{n\pi}{7}$  (4)  $\sin \frac{3n\pi}{5} + \cos \frac{n\pi}{4}$

5.3 一人每年初在银行存款一次，设其第  $n$  年新存款额为  $f(n)$ ，若银行年息为  $\alpha$ ，每年所得利息自动转入下年，以  $y(n)$  表示第  $n$  年的总存款额，试列其差分方程。

5.4\* 一质子在运动过程中不断与其他质子发生碰撞，设每次碰撞使其能量损失  $1/2$ ，若以  $y(n)$  表示第  $n$  次碰撞后质子的能量，试列其差分方程。

5.5\* 已知细胞以每秒一分为二的速度进行分裂(其中之一为母体)，同时，每个细胞的寿命为 3 秒，若以  $y(n)$  表示第  $n$  秒末的细胞数，试列其差分方程。

5.6 试写出图 5-16 所示系统的差分方程。

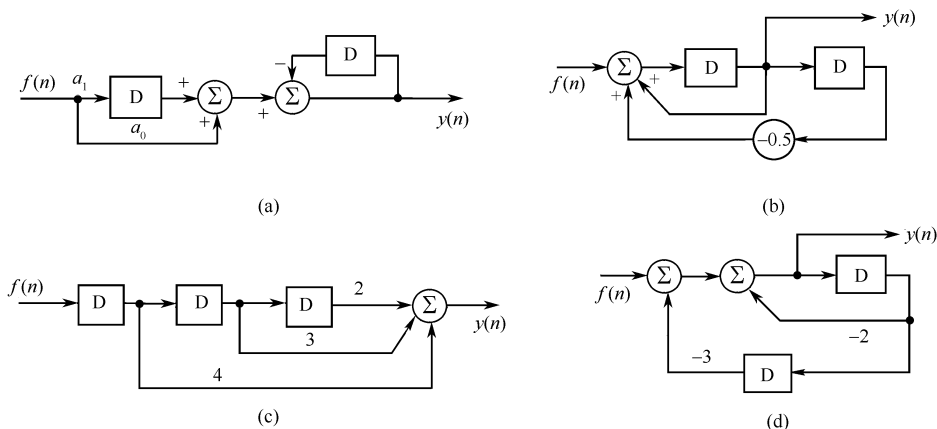


图 5-16

5.7 求下列系统的零输入响应  $y_x(n]$ , 已知激励  $f(n]$  在  $n = 0$  时输入。

- (1)  $6y(n+2) + 5y(n+1) + y(n) = f(n), \quad y(-2) = y(-1) = 2$
- (2)  $y(n) + 0.5y(n-1) - 0.5y(n-2) = f(n), \quad y(-2) = 0, \quad y(-1) = 1$
- (3)  $y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 1$
- (4)  $y(n+2) + 9y(n) = 0, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 0$
- (5)  $y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 0, \quad y(0) = y(-1) = 1$
- (6)  $y(n+3) + 6y(n+2) + 12y(n+1) + 8y(n) = U(n), \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2, \quad y(3) = -23$
- (7)  $6y(n) - 5y(n-1) + y(n-2) = (-1)^{n-2}U(n-2), \quad y(0) = 15, \quad y(1) = 9$

5.8 求下列齐次差分方程的解。

- (1)  $y(n) + \frac{1}{3}y(n-1) = 0, \quad y(-1) = 1$
- (2)  $y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y(-1) = 0$
- (3)  $y(n) - 7y(n-1) + 16y(n-2) - 12y(n-3) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -1, \quad y(2) = -3$

5.9 求下列差分方程所描述的系统的单位样值响应。

- (1)  $y(n) - \frac{1}{9}y(n-2) = f(n)$
- (2)  $y(n) + \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = f(n)$
- (3)  $y(n+2) - y(n+1) + \frac{1}{4}y(n) = f(n)$
- (4)  $y(n+2) - y(n) = f(n+1) - f(n)$
- (5)  $y(n+2) - \frac{3}{5}y(n+1) - \frac{4}{25}y(n) = f(n)$
- (6)  $y(n) - 4y(n-1) + 8y(n-2) = f(n)$

5.10 求图 5-17 所示系统的单位样值响应。

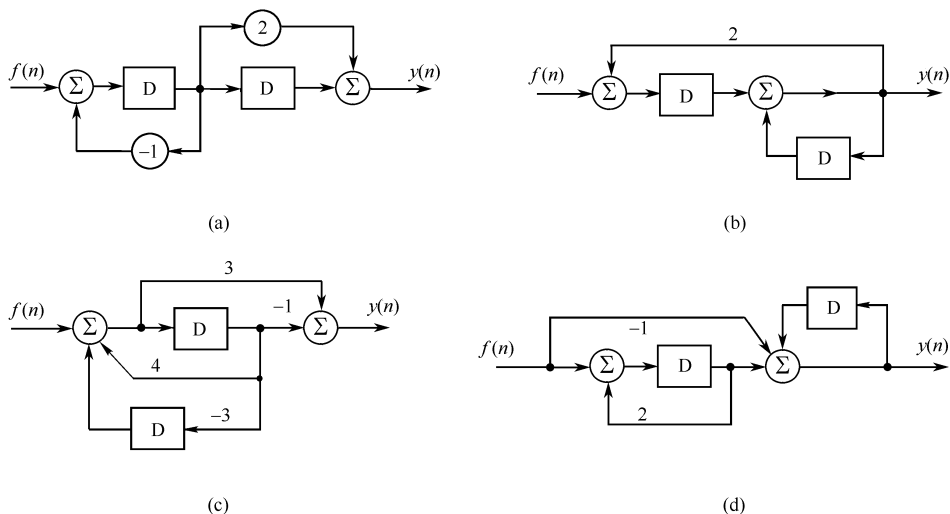


图 5-17

5.11 求下列信号的卷积。

- (1)  $\{10, -3, 6, 8, 4, 0, 1\}_0 * \{0.5, 0.5, 0.5, 0.5\}_0$
- (2)  $\{2, 1, 3, 2, 4\}_{-1} * \{0, 1, 4, 2\}_0$
- (3)  $\{3, 2, 1, -3\}_{-1} * \{4, 8, -2\}_{-1}$
- (4)  $\{1, 1\}_0 * \{2, 2\}_0 * \{1, 1\}_0$
- (5)  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}_0 * \{1, -2, 1\}_0$
- (6)  $\{0, 1, 2, 3\}_{-1} * \{1, 1, 1, 1\}_0$

5.12 求下列信号的卷积。

- (1)  $e^{-2n}U(n) * e^{-3n}U(n)$
- (2)  $2^n U(n) * 2^n U(n)$
- (3)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n U(n) * U(n)$
- (4)  $[U(n) - U(n-4)] * [U(n) - U(n-4)]$
- (5)  $nU(n) * nU(n)$
- (6)  $[U(n) - U(n-4)] * \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$$(7) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)U(n) * \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)U(n) \quad (8) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)U(n) * 2^n U(n)$$

5.13 已知各系统的激励 $f(n)$ 和单位样值响应 $h(n)$ 的波形如图5-18所示,求其零状态响应 $y_f(n)$ 的波形。

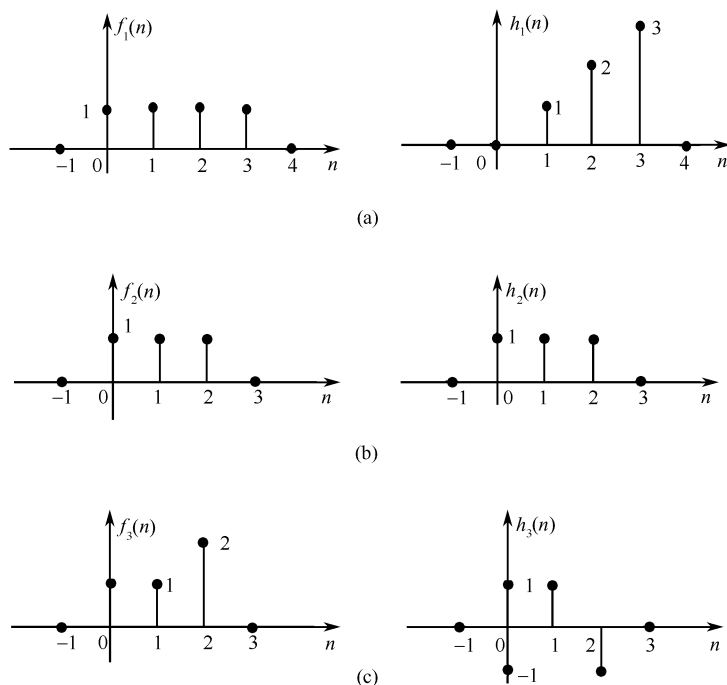


图 5-18

5.14 求下列系统的全响应并指出零输入和零状态响应。

$$(1) y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = U(n+1) - 2U(n), \quad y_x(0) = y_x(1) = 1$$

$$(2) y(n+2) + y(n+1) - 6y(n) = 4^{n+1}U(n+1), \quad y_x(0) = 0, \quad y_x(1) = 1$$

$$(3) y(n) + 2y(n-1) = (3n+4)U(n), \quad y(-1) = -1$$

$$(4) y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = U(n), \quad y_x(0) = 1, \quad y_x(1) = 5$$

$$(5) y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 3^n U(n), \quad y(0) = y(1) = 0$$

$$(6) y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 3(0.5)^n U(n), \quad y(-1) = 3, \quad y(-2) = -5$$

5.15 已知 LTI 系统的差分方程为  $y(n) + 0.5y(n-1) = f(n)$

(1) 求系统的单位样值响应  $h(n)$ ;

(2) 求系统对下列输入的响应:(a)  $f(n) = (-0.5)^n U(n)$ ;(b)  $f(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-1)$ 。

5.16 已知 LTI 系统的差分方程及初始条件为

$$y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = f(n), y_x(0) = 1, y_x(1) = 2$$

(1) 绘出系统框图;

(2) 求系统的单位样值响应  $h(n)$ ;

(3) 若  $f(n) = U(n+1)$ , 求系统的全响应  $y(n)$ , 指出零输入和零状态响应;

(4) 比较全响应  $y(n)$  在  $n=0, n=1$  时的值与初始值, 二者不同的原因是什么?

5.17 已知系统的单位阶跃响应  $g(n) = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3(0.5)^n + 3\right]U(n)$ 。

(1) 求系统的单位样值响应  $h(n)$ ;

(2) 写出系统的差分方程。

5.18 已知 LTI 系统单位阶跃响应  $g(n) = 2[1 - (0.5)^n]U(n)$ , 求系统在激励  $f(n) = 0.5^n U(n)$  时的零状态响应。

5.19 已知系统差分方程如下, 求  $y_x(n)$ 。

$$(1) y(n) + 0.5y(n-1) - 0.5y(n-2) = f(n), \quad y_x(-1) = 1, \quad y_x(-2) = 0$$

$$(2) y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = f(n), \quad y_x(-1) = 0, \quad y_x(-2) = 0.5$$

5.20 已知 LTI 系统的差分方程为  $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = f(n) - f(n-1)$ , 零状态响应为  $y_f(n) = 2[(0.5)^n - 1]U(n)$ , 求激励信号  $f(n)$ 。

5.21 系统如图 5-19 所示。

- (1) 求系统方程;
- (2) 求系统的单位样值响应  $h(n)$ ;
- (3) 在激励  $f(n) = 3^n U(n)$ , 初始条件  $y(0) = y(1) = 0$  下, 求系统的全响应。

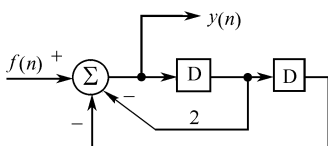


图 5-19

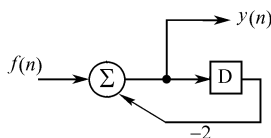


图 5-20

5.22 系统如图 5-20 所示。

- (1) 求系统方程;
- (2) 求系统的单位样值响应  $h(n)$  和单位阶跃响应  $g(n)$ ;
- (3) 在激励  $f(n) = (n-2)U(n)$ , 初始条件  $y(0) = 1$  下, 求系统的全响应。

5.23 如图 5-21 所示复合系统由三个子系统组成, 其单位序列响应分别为

$$h_1(n) = (0.5)^n U(n), \quad h_2(n) = \delta(n-2), \quad h_3(n) = U(n)$$

试求复合系统的单位序列响应  $h(n)$ 。

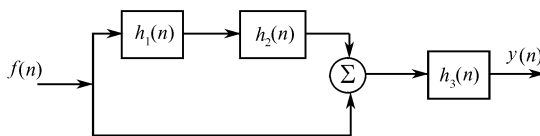


图 5-21

## 上机练习

5.1 利用 conv 验证卷积和的交换律、分配律和结合律。

5.2 已知系统的差分方程为  $y(n) - 0.8y(n-1) + 0.12y(n-2) = f(n) + f(n-1)$

- (1) 利用 impz 计算单位样值响应, 画出前 51 点的值;
- (2) 利用 filter 函数和本节中给出的 deltaN 函数, 计算单位样值响应, 并与 (1) 比较。

5.3 已知系统的差分方程为  $y(n) - 1.845y(n-1) + 0.8506y(n-2) = f(n)$ ,  $f(n) = U(n)$ . 分别用 conv 和 filter 求出系统的零状态响应, 并比较两种响应的不同以及产生此不同的原因。

5.4 利用 conv, 计算下列两个序列的卷积和  $f_1(n) * f_2(n)$ , 其中

$$f_1(n) = \begin{cases} 3n+9, & -3 \leq n \leq 2 \\ -n^2+22, & 3 \leq n \leq 6 \\ -7, & 7 \leq n \leq 10 \\ 10\cos(0.5^n), & 11 \leq n \leq 15 \\ 100e^{-0.2n}, & 16 \leq n \leq 20 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}; \quad f_2(n) = \begin{cases} 4n^{0.3}, & 1 \leq n \leq 3 \\ n-10, & 4 \leq n \leq 6 \\ -n+12, & 7 \leq n \leq 10 \\ 0, & 11 \leq n \leq 13 \\ 2, & 14 \leq n \leq 15 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

# 第 6 章 离散时间信号与系统的 $z$ 域分析

## 内 容 提 要

在离散信号与系统的分析中, $z$  变换是一种重要的数学工具,其作用类似于连续系统分析中的拉氏变换。它把系统的差分方程变换为代数方程,而且代数方程中包括了系统的初始状态,从而可求得系统的零输入响应、零状态响应与全响应。

本章讨论 $z$ 变换的定义、性质及逆变换的计算,在此基础上研究离散时间系统的 $z$ 域分析,以及离散系统的系统函数与频率响应。

## 6.1 离散信号的 $z$ 变换

### 6.1.1 $z$ 变换的定义

$z$  变换的定义可以借助抽样信号的拉氏变换引出。若连续信号 $f(t)$  经均匀冲激抽样,则抽样信号 $f_s(t)$  可以表示为

$$f_s(t) = f(t) \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad (6-1)$$

式中, $T$  为抽样间隔。对上式两边取双边拉氏变换,因为 $\delta(t - nT) \longleftrightarrow e^{-nTs}$ ,可得 $f_s(t)$  的双边拉氏变换为

$$F_s(s) = \mathcal{L}[f_s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \quad (6-2)$$

令 $z = e^{sT}$  或 $s = \frac{1}{T} \ln z$ ,则式(6-2) 变成了复变量 $z$  的函数,用 $F(z)$  表示,即

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) z^{-n}$$

为了简便,序列 $f(nT)$  仍用 $f(n)$  表示,即 $f(n) = f(nT) = f(t)|_{t=nT}$ ,于是上式变为

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n} \quad (6-3)$$

式(6-3) 称为序列 $f(n)$  的双边 $z$  变换,通常记为

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n} \quad (6-4)$$

这样,已知一个序列便可由式(6-4) 确定一个 $z$  变换函数 $F(z)$ 。反之,如果给定 $F(z)$ ,则 $F(z)$  的逆变换记为 $\mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$ ,并由以下的围线积分给出

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz \quad (6-5)$$

式中, $C$  是包围 $F(z)z^{n-1}$  所有极点的逆时针闭合积分路线。下面推导之。

因为

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

对此式两边分别乘以  $z^{m-1}$ , 然后沿围线  $C$  积分, 得

$$\oint_C F(z) z^{m-1} dz = \oint_C \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n} \right] z^{m-1} dz$$

交换积分与求和的次序, 得

$$\oint_C F(z) z^{m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \oint_C z^{m-n-1} dz \quad (6-6)$$

根据复变函数理论中的柯西定理, 知

$$\oint_C z^{k-1} dz = \begin{cases} 2\pi j, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

这样式(6-6) 的右边只存在  $m = n$  一项, 其余各项均等于零。于是式(6-6) 变成

$$\oint_C F(z) z^{n-1} dz = 2\pi j f(n)$$

即

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz$$

此即式(6-5)。

这样, 式(6-4) 和式(6-5) 便构成了一对  $z$  变换对。为简便起见,  $f(n)$  与  $F(z)$  之间的关系仍简记为

$$f(n) \longleftrightarrow F(z) \quad (6-7)$$

与拉氏变换类似,  $z$  变换亦有单边与双边之分。序列  $f(n)$  的单边  $z$  变换定义为

$$F(z) = \mathcal{Z} [f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} \quad (6-8)$$

即求和只对  $n$  的非负值进行 (不论  $n < 0$  时  $f(n)$  是否为零)。而  $F(z)$  的逆变换仍由式(6-5) 给出, 只是将  $n$  的范围限定为  $n \geq 0$ , 即

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1} [F(z)] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz, & n \geq 0 \end{cases} \quad (6-9)$$

或写为

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1} [F(z)] = \left[ \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz \right] U(n) \quad (6-10)$$

不难看出, 式(6-8) 等于  $f(n) U(n)$  的双边  $z$  变换, 因而  $f(n)$  的单边  $z$  变换也可写为

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) U(n) z^{-n} \quad (6-11)$$

由以上定义可见, 如果  $f(n)$  是因果序列, 则其单、双边  $z$  变换相同, 否则二者不等。在拉氏变换中我们主要讨论单边拉氏变换, 这是由于在连续系统中, 非因果信号的应用较少。对于离散系统, 非因果序列也有一定的应用范围, 因此, 本章以讨论单边  $z$  变换为主, 适当兼顾双边  $z$  变换。讨论中在不致混淆的情况下, 将两种变换统称为  $z$  变换,  $f(n)$  与  $F(z)$  的关系统一由式(6-7) 表示。

### 6.1.2 $z$ 变换的收敛域

由定义可知, 序列的  $z$  变换是  $z$  的幂级数, 只有当该级数收敛时,  $z$  变换才存在。

对任意给定的序列  $f(n)$ , 使  $z$  变换定义式幂级数  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n}$  或  $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$  收敛的复变量  $z$

在  $z$  平面上的取值区域,称为  $z$  变换  $F(z)$  的收敛域,也常用 ROC 表示。

根据幂级数理论,式(6-4)或式(6-8)所示级数收敛的充分必要条件是满足绝对可和条件,即要求

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)z^{-n}| < \infty \quad (6-12)$$

下面用实例来研究不同形式的序列  $z$  变换的收敛域问题。

**【例 6-1】** 求以下有限长序列的双边  $z$  变换: (1)  $\delta(n)$ , (2)  $f(n) = \{1, 2, 1\}_{-1}$ 。

**解:** (1) 由式(6-4),单位样值序列的  $z$  变换为

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n)z^{-n} = 1$$

即  $\delta(n) \longleftrightarrow 1$

$F(z)$  是与  $z$  无关的常数,因而其 ROC 是  $z$  的全平面。

(2)  $f(n)$  的双边  $z$  变换为

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n} = z + 2 + \frac{1}{z}$$

由上式可知,除  $z = 0$  和  $z = \infty$  外,对任意  $z$ ,  $F(z)$  有界,因此其 ROC 为  $0 < |z| < \infty$ 。

**【例 6-2】** 求因果序列  $f_1(n) = a^n U(n)$  的双边  $z$  变换( $a$  为常数)。

**解:** 设  $f_1(n) \longleftrightarrow F_1(z)$ , 则

$$F_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

利用等比级数求和公式,上式仅当公比  $az^{-1}$  满足  $|az^{-1}| < 1$ , 即  $|z| > |a|$  时收敛,此时

$$F_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

故其收敛域为  $|z| > |a|$ , 这个收敛域在  $z$  平面上是半径为  $|a|$  的圆外区域,如图 6-1(a) 所示。

显然它也是单边  $z$  变换的收敛域。

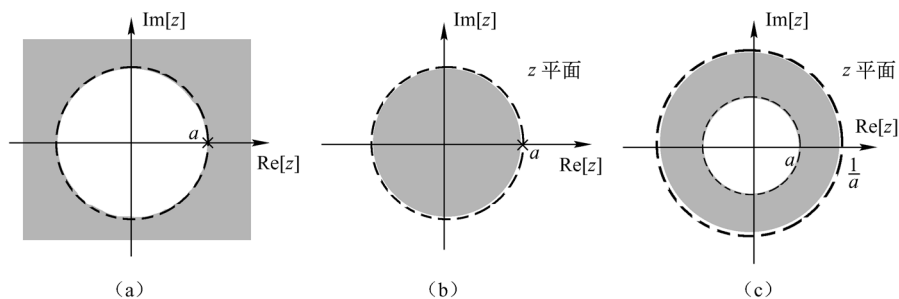


图 6-1 例 6-2、例 6-3、例 6-4 的收敛域

**【例 6-3】** 求反因果序列  $f_2(n) = -a^n U(-n-1)$  ( $a$  为常数) 的  $z$  变换。

**解:**  $f_2(n)$  的(双边) $z$ 变换为

$$\begin{aligned} F_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n U(-n-1)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n \\ &= - \frac{a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

上式成立的条件是  $|a^{-1}z| < 1$ , 即  $|z| < |a|$ , 此即  $F_2(z)$  的收敛域。因此该反因果序列的收敛域是  $z$  平面上半径为  $|a|$  的圆的内部, 如图 6-1(b) 所示。

**【例 6-4】** 求双边序列  $f_3(n) = a^{|n|}$  ( $|a| < 1$ ) 的双边  $z$  变换。

**解:**  $f_3(n)$  的双边  $z$  变换为

$$F_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{-z}{z - 1/a} + \frac{z}{z - a}$$

上式中第一项级数收敛的条件是  $|az| < 1$ , 即  $|z| < 1/|a|$ , 第二项级数收敛的条件是  $|az^{-1}| < 1$ , 即  $|z| > |a|$ 。因此,  $F_3(z)$  存在的条件是  $|a| < |z| < 1/|a|$ 。因为  $|a| < 1$ , 所以这个不等式是可以满足的。因此  $F_3(z)$  的收敛域为  $|a| < |z| < 1/|a|$ , 这个区域是  $z$  平面上半径分别为  $|a|$  和  $1/|a|$  的两个圆之间的圆环, 如图 6-1(c) 所示。

至此, 我们研究了四种类型序列  $z$  变换的收敛域, 综合上述讨论, 可得到以下结论:

(1)  $z$  变换函数在收敛域内是解析函数, 且无任何极点。

(2) 有限长序列  $z$  变换的收敛域是整个  $z$  平面, 可能不包括  $z = 0$  和 / 或  $z = \infty$ 。

(3) 因果序列若存在  $z$  变换, 则其单、双边变换相同, 收敛域也相同, 均为  $|z| > R_1$ , 在  $z$  平面上是半径为  $R_1$  的圆的外部。如果变换是有理的, 那么  $R_1$  等于  $F(z)$  极点中的最大模值, 即收敛域位于  $z$  平面内最外层极点的外边。

(4) 反因果序列的  $z$  变换若存在, 则其收敛域为  $|z| < R_2$ , 在  $z$  平面上是以  $R_2$  为半径的圆的内部。如果变换是有理的, 那么  $R_2$  等于  $F(z)$  极点中的最小模值, 即收敛域位于  $z$  平面内最内层极点的里边。反因果序列的单边  $z$  变换均为零, 无研究意义。

(5) 双边序列若存在  $z$  变换, 则其双边变换的收敛域是  $z$  平面内由  $R_1 < |z| < R_2$  所确定的圆环。

(6) 因为单边  $z$  变换可以看做序列因果部分 ( $n \geq 0$ ) 的双边  $z$  变换, 故其收敛域与因果序列的情形类同, 这个收敛域是唯一的, 因此讨论单边  $z$  变换时可以不注明收敛域。对于双边变换, 不同序列的变换可以有相同的表示式, 只是收敛域不同 (见【例 6-2】和【例 6-3】)。因此双边  $z$  变换必须标注收敛域, 才能唯一确定其对应的时间序列。

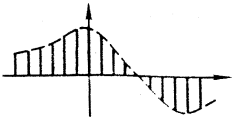
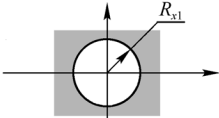
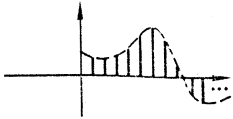
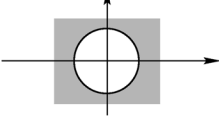

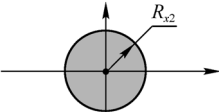
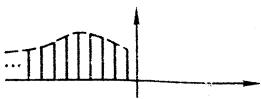
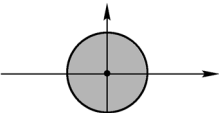
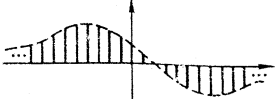
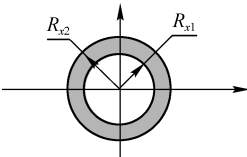
为便于对比, 将各类序列的双边  $z$  变换的收敛域列于表 6-1。

表 6-1 序列形式与双边  $z$  变换收敛域的关系

序 列 形 式		$z$ 变 换 收 敛 域	
有限长序列			
① $n_1 < 0$ $n_2 > 0$			$\infty >  z  > 0$
② $n_1 \geq 0$ $n_2 > 0$			$ z  > 0$
③ $n_1 < 0$ $n_2 \leq 0$			$\infty >  z $



续表

序 列 形 式		$z$ 变 换 收 敛 域	
右边序列 ① $n_1 < 0$ $n_2 = \infty$  ② $n_1 \geq 0$ $n_2 = \infty$ (因果序列)			$\infty >  z  > R_{x1}$
			$ z  > R_{x1}$
左边序列 ① $n_1 = -\infty$ $n_2 > 0$  ② $n_1 = -\infty$ $n_2 \leq 0$			$R_{x2} >  z  > 0$
			$R_{x2} >  z $
双边序列 $n_1 = -\infty$ $n_2 = \infty$			$R_{x2} >  z  > R_{x1}$

### 6.1.3 常用离散信号的单边 $z$ 变换

#### 1. 单位样值信号 $\delta(n)$

由例 6-1 已知

$$\delta(n) \longleftrightarrow 1 \quad (6-13)$$

#### 2. 单位阶跃序列 $U(n)$

将  $U(n)$  代入式(6-8), 得

$$\mathcal{Z}[U(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} U(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$$

若  $|z^{-1}| < 1$ , 即  $|z| > 1$ , 该级数收敛, 此时有

$$\mathcal{Z}[U(n)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

故

$$U(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z - 1} \quad (6-14)$$

#### 3. 单边指数序列 $a^n U(n)$ ( $a$ 为任意常数)

在例 6-2 中已求得

$$\mathcal{Z}[a^n U(n)] = \frac{z}{z - a}$$

所以 
$$a^n U(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad (6-15)$$

表 6-2 列出了典型序列的单边  $z$  变换,以供查阅。

表 6-2 典型序列的单边  $z$  变换

序号	序 列	单边 $z$ 变换	收敛域	序号	序 列	单边 $z$ 变换	收敛域
	$f(n)$	$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$	$ z  > R$	6	$e^{jn\omega_0}$	$\frac{z}{z - e^{j\omega_0}}$	$ z  > 1$
1	$\delta(n)$	1	$ z  \geq 0$	7	$\sin(n\omega_0)$	$\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z  > 1$
2	$\delta(n-m) (m > 0)$	$z^{-m}$	$ z  > 0$	8	$\cos(n\omega_0)$	$\frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$	$ z  > 1$
3	$U(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z  > 1$	9	$\beta^n \sin(n\omega_0)$	$\frac{\beta z \sin \omega_0}{z^2 - 2\beta z \cos \omega_0 + \beta^2}$	$ z  >  \beta $
4	$n$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z  > 1$	10	$\beta^n \cos(n\omega_0)$	$\frac{z(z - \beta \cos \omega_0)}{z^2 - 2\beta z \cos \omega_0 + \beta^2}$	$ z  >  \beta $
5	$e^{bn}$	$\frac{z}{z - e^b}$	$ z  >  e^b $				

### 6.1.4 $z$ 平面与 $s$ 平面的映射关系

在 6.1.1 节介绍  $z$  变换的定义时,已经给出了复变量  $z$  与  $s$  有如下关系:

$$z = e^{sT} \quad \text{或} \quad s = \frac{1}{T} \ln z \quad (6-16)$$

式中,  $T$  是抽样间隔,抽样角频率  $\omega_s = 2\pi/T$ 。

为了说明在式(6-16)下  $s$  复平面与  $z$  复平面的映射关系,将  $s$  表示成直角坐标形式,而把  $z$  表示成极坐标形式,即

$$s = \sigma + j\omega, \quad z = re^{j\theta} \quad (6-17)$$

将式(6-17)代入式(6-16)得

$$re^{j\theta} = e^{(\sigma + j\omega)T}$$

$$r = e^{\sigma T} \quad (6-18)$$

于是得到

$$\theta = \omega T = 2\pi \frac{\omega}{\omega_s}$$

式(6-18)表明  $s$  到  $z$  平面的映射关系如下:

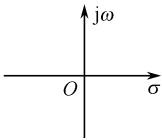
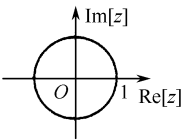
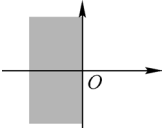
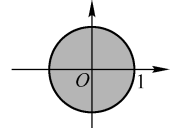
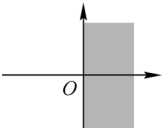
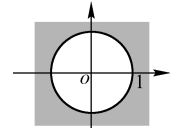
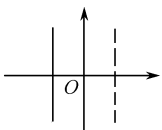
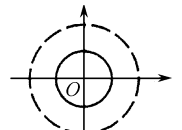
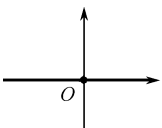
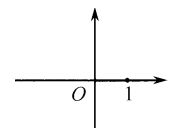
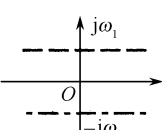
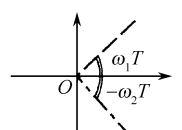
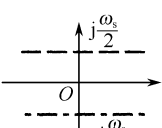
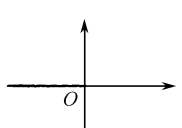
(1)  $s$  平面上的虚轴 ( $\sigma = 0, s = j\omega$ ) 映射为  $z$  平面上的单位圆; 其右半平面 ( $\sigma > 0$ ) 映射为  $z$  平面上单位圆的外部; 而左半平面 ( $\sigma < 0$ ) 映射为  $z$  平面上单位圆的内部。

(2)  $s$  平面上的实轴 ( $\omega = 0, s = \sigma$ ) 映射为  $z$  平面的正实轴 ( $\theta = 0$ ), 而原点 ( $\sigma = 0, \omega = 0$ ) 映射为  $z$  平面上  $z = 1$  的点 ( $r = 1, \theta = 0$ ); 通过  $j\frac{k\omega_s}{2} (k = \pm 1, \pm 3, \dots)$  而平行于实轴的直线映射为  $z$  平面的负实轴。

(3) 因为  $e^{j\omega T}$  是以  $\omega_s = 2\pi/T$  为周期的函数, 而  $\theta = \omega T$ , 因此当在  $s$  平面上沿着虚轴  $\omega$  从  $-\pi/T$  变化到  $\pi/T$  时, 在  $z$  平面上沿单位圆  $\theta$  从  $-\pi$  变化到  $\pi$ , 刚好是一个圆周。  $\omega$  沿虚轴每变化  $\omega_s$ , 则  $z$  平面上  $\theta$  沿单位圆转一圈。

$s$  到  $z$  平面的映射关系如表 6-3 所示。

表 6-3  $z$  平面与  $s$  平面的映射关系

$s$ 平面 ( $s = \sigma + j\omega$ )		$z$ 平面 ( $z = re^{j\theta}$ )	
虚轴 ( $\sigma = 0$ ) ( $s = j\omega$ )			单位圆 ( $r = 1$ ) ( $\theta$ 任意)
左半平面 ( $\sigma < 0$ )			单位圆内 ( $r < 1$ ) ( $\theta$ 任意)
右半平面 ( $\sigma > 0$ )			单位圆外 ( $r > 1$ ) ( $\theta$ 任意)
平行于虚轴的 直线( $\sigma$ 为常数)			圆 ( $\sigma > 0, r > 1$ ) ( $\sigma < 0, r < 1$ )
实轴 ( $\omega = 0$ ) ( $s = \sigma$ )			正实轴 ( $\theta = 0$ ) ( $r$ 任意)
平行于实轴的 直线( $\omega$ 为常数)			始于原点的辐射线 ( $\theta$ 为常数) ( $r$ 任意)
通过 $\pm j\frac{k\omega_s}{2}$ 平 行于实轴的直线 ( $k = 1, 3, \dots$ )			负实轴 ( $\theta = \pi$ ) ( $r$ 任意)

## 6.2 $z$ 变换的基本性质

本节讨论  $z$  变换 (包括单边、双边) 的基本性质。绝大多数性质对单边、双边  $z$  变换是相同的,少数对单边、双边  $z$  变换有差别的性质,在讨论中将予以说明。

### 6.2.1 线性特性

设  $f_1(n) \longleftrightarrow F_1(z)$ ,  $R_1 < |z| < R_2$ ,  $R_1$  可为零,  $R_2$  可以为  $\infty$ , 下同  
 $f_2(n) \longleftrightarrow F_2(z)$ ,  $R_3 < |z| < R_4$

$$\text{则 } a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) \longleftrightarrow a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) \quad (6-19)$$

其中  $a_1, a_2$  为任意常数。相加后的收敛域至少是两个函数  $F_1(z)$ 、 $F_2(z)$  收敛域的重叠部分, 有些情况下收敛域可能会扩大。

【例 6-5】求序列  $\cos(\omega_0 n) U(n)$  和  $\sin(\omega_0 n) U(n)$  的  $z$  变换。

$$\text{解: 因为 } \cos(\omega_0 n) U(n) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) U(n)$$

$$\text{而 } e^{j\omega_0 n} U(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}, \quad |z| > 1$$

$$e^{-j\omega_0 n} U(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}, \quad |z| > 1$$

由线性性质, 即得

$$\cos(\omega_0 n) U(n) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) = \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}, \quad |z| > 1 \quad (6-20)$$

$$\text{类似地, 可得 } \sin(\omega_0 n) U(n) \longleftrightarrow \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}, \quad |z| > 1 \quad (6-21)$$

### 6.2.2 移位特性

单边变换与双边变换的移位特性差别很大, 下面分别进行讨论。

#### 1. 双边 $z$ 变换

$$\text{若 } f(n) \longleftrightarrow F(z), \quad R_1 < |z| < R_2$$

$$\text{则 } f(n - m) \longleftrightarrow z^{-m} F(z), \quad R_1 < |z| < R_2 \quad (6-22)$$

式中,  $m$  为任意整数

证明: 根据双边  $z$  变换的定义, 可得

$$\mathcal{Z}[f(n - m)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n - m) z^{-n} = z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) z^{-k} = z^{-m} F(z)$$

一般来说, 移位不会改变收敛域, 至多是  $z = 0$  和 / 或  $z = \infty$  处的收敛情况发生变化。

#### 2. 单边 $z$ 变换

$$\text{若 } f(n) \longleftrightarrow F(z)$$

$$\text{则 } f(n - m) \longleftrightarrow z^{-m} \left[ F(z) + \sum_{k=-m}^{-1} f(k) z^{-k} \right] \quad (6-23)$$

$$f(n + m) \longleftrightarrow z^m \left[ F(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{-k} \right] \quad (6-24)$$

证明: 根据单边  $z$  变换的定义

$$\mathcal{Z}[f(n - m)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n - m) z^{-n} = z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} f(n - m) z^{-(n-m)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{令 } n - m = k, \text{ 则有 } \mathcal{Z}[f(n - m)] &= z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} f(k) z^{-k} \\
 &= z^{-m} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} + \sum_{k=-m}^{-1} f(k) z^{-k} \right] \\
 &= z^{-m} \left[ F(z) + \sum_{k=-m}^{-1} f(k) z^{-k} \right]
 \end{aligned}$$

此即式(6-23)。类似地可证明式(6-24)。

上述讨论并未限制  $f(n)$  为何种序列。如果  $f(n)$  是因果序列, 则式(6-23) 变为

$$f(n - m) \longleftrightarrow z^{-m} F(z) \quad (6-25)$$

而式(6-24) 不变。

**【例 6-6】** 求矩形序列  $G_N(n)$  的  $z$  变换。

$$\text{解: 因为 } G_N(n) = U(n) - U(n - N), \quad U(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z - 1}$$

由线性及移位特性, 得

$$G_N(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z - 1} - z^{-N} \frac{z}{z - 1} = \frac{z}{z - 1} (1 - z^{-N}), \quad |z| > 1$$

**【例 6-7】** 求序列  $f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n - mN)$  的  $z$  变换。

解: 因为  $\delta(n) \longleftrightarrow 1$ , 由移位特性  $\delta(n - mN) \longleftrightarrow z^{-mN}$ , 再由线性特性, 得

$$f(n) \longleftrightarrow 1 + z^{-N} + z^{-2N} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} (z^{-N})^m = \frac{1}{1 - z^{-N}}$$

### 6.2.3 尺度变换特性

$$\text{若 } f(n) \longleftrightarrow F(z), \quad R_1 < |z| < R_2$$

$$\text{则 } a^n f(n) \longleftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right), \quad R_1 < \left|\frac{z}{a}\right| < R_2 \quad (6-26)$$

式中,  $a$  为任意常数。

$$\text{证明: 因为 } \mathcal{Z}[a^n f(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n f(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n}$$

与  $z$  变换的定义式比较, 即有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = F\left(\frac{z}{a}\right), \quad \text{且收敛域变为 } R_1 < \left|\frac{z}{a}\right| < R_2$$

$$\text{所以 } a^n f(n) \longleftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$$

**【例 6-8】** 用尺度变换特性求  $a^n U(n)$  的  $z$  变换。

$$\text{解: 因为 } U(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1$$

$$\text{由尺度变换特性 } a^n U(n) \longleftrightarrow \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a} - 1} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

## 6.2.4 时间翻转特性

若  $f(n) \longleftrightarrow F(z), \quad R_1 < |z| < R_2$

则  $f(-n) \longleftrightarrow F(z^{-1}), \quad R_1 < |z^{-1}| < R_2 \quad \text{或} \quad \frac{1}{R_2} < |z| < \frac{1}{R_1} \quad (6-27)$

证明: 因为

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}$$

所以

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(-n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(-n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)(z^{-1})^{-n} = F(z^{-1}) \end{aligned}$$

由于单边变换只对  $n \geq 0$  部分求级数和, 故不存在时间翻转特性。

## 6.2.5 $z$ 域微分(时域线性加权)

若  $f(n) \longleftrightarrow F(z), \quad R_1 < |z| < R_2$

则  $nf(n) \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} F(z), \quad R_1 < |z| < R_2 \quad (6-28)$

证明: 因为

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}$$

两边对  $z$  求导数, 得

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n} \right)$$

交换求导与求和的次序, 上式变为

$$\frac{dF(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{d}{dz} (z^{-n}) = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nf(n)z^{-n} = z^{-1} \mathcal{Z}[nf(n)]$$

所以

$$nf(n) \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} F(z)$$

【例 6-9】求  $nU(n)$  的  $z$  变换。

解: 因为

$$U(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

由  $z$  域微分性质, 可得  $nU(n) \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (6-29)$

## 6.2.6 卷积定理

### 1. 时域卷积定理

若

$$f_1(n) \longleftrightarrow F_1(z), \quad R_1 < |z| < R_2$$

$$f_2(n) \longleftrightarrow F_2(z), \quad R_3 < |z| < R_4$$

(6-30)

则

$$f_1(n) * f_2(n) \longleftrightarrow F_1(z)F_2(z)$$

收敛域至少为两函数收敛域的重叠部分, 有可能会扩大。

证明:

$$f_1(n) * f_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m)f_2(n-m)$$

代入  $z$  变换的定义式中,得

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f_1(n) * f_2(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m) f_2(n-m) \right] z^{-n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_2(n-m) z^{-n} \\ &= \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m) z^{-m} \right) F_2(z) = F_1(z) F_2(z)\end{aligned}$$

所以

$$f_1(n) * f_2(n) \longleftrightarrow F_1(z) F_2(z)$$

以上是双边变换的情形。对于单边变换,应加上限制:  $f_1(n) = f_2(n) = 0, n < 0$  时,即  $f_1(n)$  和  $f_2(n)$  均为因果序列。

**【例 6-10】** 计算卷积  $U(n) * U(n+1)$ 。

解: 因为

$$U(n) \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

由移位特性

$$U(n+1) \longleftrightarrow \frac{z^2}{z-1}$$

注意,本例中  $U(n+1)$  为非因果信号,故不能用单边变换求解。则由卷积定理可得

$$U(n) * U(n+1) \longleftrightarrow \frac{z^3}{(z-1)^2} = z \left[ \frac{z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2} \right]$$

从而

$$U(n) * U(n+1) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ z \frac{z}{z-1} + z \frac{z}{(z-1)^2} \right] = (n+2)U(n+1)$$

## 2. $z$ 域卷积定理(序列相乘)

若

$$f_1(n) \longleftrightarrow F_1(z), \quad R_1 < |z| < R_2$$

$$f_2(n) \longleftrightarrow F_2(z), \quad R_1 < |z| < R_2$$

则

$$f_1(n) f_2(n) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{F_1(\lambda) F_2(z/\lambda)}{\lambda} d\lambda \quad (6-31)$$

式中,  $C$  是  $F_1(\lambda)$  与  $F_2(\frac{z}{\lambda})$  收敛域公共部分内逆时针方向的围线。这里对收敛域及积分围线的选取限制较严,从而限制了它的应用,不再赘述。

### 6.2.7 初值定理和终值定理

若  $f(n)$  的终值  $f(\infty)$  存在,且  $f(n)$  的单边  $z$  变换为  $F(z)$ , 则

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (6-32)$$

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) F(z) \quad (6-33)$$

证明: 因为  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} = f(0) + f(1) z^{-1} + f(2) z^{-2} + \dots$

当  $z \rightarrow \infty$  时,上式右边除了第一项  $f(0)$  外,其余各项都趋近于零,所以

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0)$$

此即式(6-32)。

下面证明式(6-33)。

由移位特性可知

$$f(n+1) - f(n) \longleftrightarrow zF(z) - zf(0) - F(z) = (z-1)F(z) - zf(0)$$

另一方面,由单边 $z$ 变换的定义,得

$$\mathcal{Z}[f(n+1) - f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} [f(n+1) - f(n)]z^{-n}$$

$$\text{比较上面两式可得} \quad (z-1)F(z) = zf(0) + \sum_{n=0}^{\infty} [f(n+1) - f(n)]z^{-n}$$

两边取 $z \rightarrow 1$ 的极限,得

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) &= f(0) + \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} [f(n+1) - f(n)]z^{-n} \\ &= f(0) + [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \cdots \\ &= f(0) - f(0) + f(\infty) \\ &= f(\infty) \end{aligned}$$

即式(6-33)得证。

由上述推导可以看出,  $(z-1)F(z)$  的收敛域应包含单位圆,为此,  $F(z)$  的极点至多在单位圆上有 1 个一阶极点  $z=1$ ,其余极点必须都在单位圆内。

如果对双边 $z$ 变换应用初、终值定理,则需将 $f(n)$ 限制为因果序列。

$z$ 变换的性质归纳列于表 6-4,以便查阅。

表 6-4 单、双边 $z$ 变换的性质

性质名称	时域函数	单边 $z$ 变换 $F(z)$	双边 $z$ 变换 $F_b(z)$
线性特性	$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n)$	$a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$	$a_1 F_{b1}(z) + a_2 F_{b2}(z)$
移位特性	$f(n \pm m), m > 0$	—	$z^{\pm m} \cdot F_b(z)$
	$f(n-m)U(n-m), m > 0$	$z^{-m} \cdot F(z)$	$\cdots$
	$f(n-m)U(n), m > 0$	$z^{-m}F(z) + \sum_{n=-m}^{-1} f(n)z^{-n-m}$	$\cdots$
	$f(n+m)U(n), m > 0$	$z^m F(z) - \sum_{n=0}^{m-1} f(n)z^{m-n}$	$\cdots$
$z$ 域尺度变换特性	$(a)^n \cdot f(n)$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$	$F_b\left(\frac{z}{a}\right)$
时域卷积定理	$f_1(n) * f_2(n)$	$F_1(z) \cdot F_2(z)$	$F_{b1}(z) \cdot F_{b2}(z)$
$z$ 域微分	$nf(n)$	$-z \frac{dF(z)}{dz}$	$-z \frac{dF_b(z)}{dz}$
$z$ 域积分	$\frac{1}{n+m} f(n), n+m > 0$	$z^m \int_z^{\infty} \frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta$	$z^m \int_z^{\infty} \frac{F_b(\eta)}{\eta^{m+1}} d\eta$
移动累和性	$\sum_{i=-\infty}^m f(i)$	$\frac{z}{z-1} F(z)$	$\frac{z}{z-1} F_b(z)$
初值定理	$f(n)$ (因果序列)	$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$	$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F_b(z)$
终值定理	$f(n)$ (因果序列, 且 $f(\infty)$ 为有界值)	$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$	$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F_b(z)$



【例 6-11】 已知因果序列  $f(n) \longleftrightarrow F(z)$ ,  $F(z) = \frac{z}{z+1}$ , 求  $f(0)$  和  $f(\infty)$ 。

解: 由初值定理  $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z+1} = 1$

而  $F(z)$  在单位圆上  $z = -1$  处有极点, 不满足终值定理的使用条件, 故  $f(\infty)$  不存在。

事实上, 由  $f(n) = (-1)^n U(n)$  可知,  $f(0) = 1$ ; 而  $n \rightarrow \infty$  时,  $f(\infty)$  的值是  $+1$  或  $-1$ , 无法确定。

## 6.3 逆 $z$ 变换

与拉氏变换类似, 用  $z$  变换分析离散系统时, 往往需要从变换函数  $F(z)$  确定对应的时间序列, 即求  $F(z)$  的逆  $z$  变换。求逆  $z$  变换的方法有留数法、幂级数展开法 (长除法) 和部分分式展开法。下面我们只讨论用部分分式展开法求有理函数的逆变换。

$$\text{设} \quad F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad (6-34)$$

因为  $z$  变换的基本形式是  $\frac{z}{z - z_k}$ , 在利用部分分式展开的时候, 通常先将  $\frac{F(z)}{z}$  展开, 然后每个分式乘以  $z$ , 这样, 对于一阶极点,  $F(z)$  便可以展开为  $\frac{z}{z - z_k}$  形式。

另外, 对于单边变换 (或因果序列), 它的收敛域为  $|z| > R$ , 为保证在  $z = \infty$  处收敛, 其分母多项式的阶次不低于分子多项式的阶次, 即满足  $N \geq M$ 。只有双边变换才可能出现  $M > N$ 。

下面以  $N \geq M$  为例说明部分分式展开法, 此时  $\frac{F(z)}{z}$  为真分式。

如果  $\frac{F(z)}{z}$  只含一阶极点, 则可以展开为

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_{k=0}^N \frac{A_k}{z - z_k} \quad (\text{其中 } z_0 = 0)$$

$$\text{即} \quad F(z) = \sum_{k=0}^N \frac{A_k z}{z - z_k} \quad (6-35)$$

$$\text{式中} \quad A_k = \left[ (z - z_k) \frac{F(z)}{z} \right] \Big|_{z=z_k} \quad (6-36)$$

展开式中的每一项  $\frac{A_k z}{z - z_k}$  的逆变换是以下两种情形之一:

$$A_k (z_k)^n U(n) \longleftrightarrow \frac{A_k z}{z - z_k}, \quad |z| > |z_k| \quad (6-37)$$

$$\text{或} \quad -A_k (z_k)^n U(-n-1) \longleftrightarrow \frac{A_k z}{z - z_k}, \quad |z| < |z_k| \quad (6-38)$$

根据  $F(z)$  各极点与收敛域的位置关系选择式 (6-37) 或式 (6-38)。如果极点位于收敛域的内侧, 则关于该极点的展开项的逆变换为因果序列, 由式 (6-37) 得到; 如果极点位于收敛域的外

侧,则关于该极点的展开项的逆变换为反因果序列,由式(6-38)得到。逐个考察  $F(z)$  的各极点,即可得到完整的逆  $z$  变换。

如果  $\frac{F(z)}{z}$  中含有高阶极点,比如  $F(z)$  除含有  $K$  个一阶极点外,在  $z = z_i$  处还含有一个  $r$  阶极点,此时  $F(z)$  应展开为

$$F(z) = \sum_{k=0}^K \frac{A_k z}{z - z_k} + \sum_{j=1}^r \frac{B_j z}{(z - z_i)^j} \quad (6-39)$$

式中  $A_k$  仍按式(6-36) 计算,而  $B_j$  由下式计算:

$$B_j = \frac{1}{(r-j)!} \left[ \frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}} (z - z_i)^r \frac{F(z)}{z} \right] \Big|_{z=z_i} \quad (6-40)$$

**【例 6-12】** 已知  $F(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5}$ , 求  $F(z)$  可能的收敛域及相应的序列  $f(n)$ 。

**解:**  $F(z)$  的两个极点是  $z_1 = 1$  和  $z_2 = 0.5$ , 故其可能的收敛域为  $|z| < 0.5$ ,  $0.5 < |z| < 1$  或  $|z| > 1$ 。先将  $F(z)$  展开为

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{A_1}{z - 1} + \frac{A_2}{z - 0.5}$$

其中

$$A_1 = (z - 1) \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{z}{z - 0.5} \Big|_{z=1} = 2$$

$$A_2 = (z - 0.5) \frac{F(z)}{z} \Big|_{z=0.5} = \frac{z}{z - 1} \Big|_{z=0.5} = -1$$

所以

$$F(z) = \frac{2z}{z - 1} + \frac{-z}{z - 0.5}$$

(1) 若收敛域为  $|z| < 0.5$ , 则两个极点均在收敛域的外侧, 因此这两项的逆变换是反因果序列, 由式(6-38) 得

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = -2U(-n-1) + (0.5)^n U(-n-1)$$

(2) 若收敛域为  $0.5 < |z| < 1$ , 则极点  $z_2 = 0.5$  在收敛域的内侧, 相应的逆变换是因果序列, 由式(6-37) 得

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{-z}{z - 0.5} \right] = -(0.5)^n U(n)$$

而极点  $z_1 = 1$  在收敛域外侧, 因此相应的逆变换是反因果序列。于是

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = -2U(-n-1) - (0.5)^n U(n)$$

(3) 若收敛域为  $|z| > 1$ , 则所有极点在收敛域的内侧, 因此各展开项的逆变换均为因果序列, 所以

$$f(n) = 2U(n) - (0.5)^n U(n) = [2 - (0.5)^n] U(n)$$

**【例 6-13】** 已知  $F(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z(z-1)(z-0.5)}$ ,  $|z| > 1$ , 求  $f(n)$ 。

**解:** 因为

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z^2(z-1)(z-0.5)}$$

由式(6-36) 和式(6-37) 可得展开式

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{8}{z-1} + \frac{-13}{z-0.5}$$

所以

$$F(z) = 6 + \frac{2}{z} + \frac{8z}{z-1} - \frac{13z}{z-0.5}$$

因为  $|z| > 1$ , 所以  $f(n) = 6\delta(n) + 2\delta(n-1) + 8U(n) - 13(0.5)^n U(n)$

## 6.4 离散系统的 $z$ 域分析

### 6.4.1 差分方程的变换解

LTI 离散系统是用常系数线性差分方程描述的, 如果系统是因果的, 并且输入为因果信号, 那么可以用单边  $z$  变换来求解差分方程。与应用拉氏变换解微分方程相似, 此时可以将差分方程变换为  $z$  变换函数的代数方程, 并且利用单边  $z$  变换的移位特性可以将系统的初始条件包含在代数方程中, 从而能够方便地求得系统的零输入响应、零状态响应及全响应。

设因果 LTI 离散系统的差分方程为

$$\begin{aligned} y(n) + a_{N-1}y(n-1) + \cdots + a_1y(n-N+1) + a_0y(n-N) \\ = b_Mf(n) + b_{M-1}f(n-1) + \cdots + b_0f(n-M) \end{aligned} \quad (6-41)$$

如果  $f(n)$  为因果信号, 对式(6-41) 进行单边  $z$  变换, 并设  $f(n) \longleftrightarrow F(z)$ ,  $y(n) \longleftrightarrow Y(z)$ , 利用单边  $z$  变换的移位特性, 可以得到

$$\begin{aligned} Y(z) + a_{N-1}[z^{-1}Y(z) + y(-1)] + a_{N-2}[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)] + \cdots \\ = (b_M + b_{M-1}z^{-1} + \cdots + b_1z^{-M+1} + b_0z^{-M})F(z) \end{aligned}$$

对上式进行整理可得到如下形式的方程

$$(1 + a_{N-1}z^{-1} + \cdots + a_0z^{-N})Y(z) - M(z) = (b_M + b_{M-1}z^{-1} + \cdots + b_0z^{-M})F(z) \quad (6-42)$$

其中

$$M(z) = -a_{N-1}p_1(z) - a_{N-2}p_2(z) - \cdots - a_0p_N(z)$$

它是与各初始状态  $y(-1), y(-2), \cdots, y(-N)$  有关的  $z$  的多项式。由式(6-42) 可解得

$$Y(z) = \frac{M(z)}{D(z)} + \frac{N(z)}{D(z)}F(z) \quad (6-43)$$

式中

$$D(z) = 1 + a_{N-1}z^{-1} + \cdots + a_0z^{-N} = z^{-N}(z^N + a_{N-1}z^{N-1} + \cdots + a_1z + a_0) \quad (6-44)$$

$$N(z) = b_M + b_{M-1}z^{-1} + \cdots + b_0z^{-M} = z^{-M}(b_Mz^M + b_{M-1}z^{M-1} + \cdots + b_0) \quad (6-45)$$

称为差分方程的特征多项式。

式(6-43) 中  $M(z)$  只与响应在  $n < 0$ , 即未施加激励  $f(n)$  时的初始状态有关, 因而式中第一项是零输入响应  $y_x(n)$  的  $z$  变换  $Y_x(z)$ ; 式中第二项仅与激励  $f(n)$  的  $z$  变换  $F(z)$  以及系统特性(由  $N(z), D(z)$  表征) 有关, 因而是零状态响应  $y_f(n)$  的  $z$  变换  $Y_f(z)$ 。于是式(6-43) 可以写为

$$Y(z) = Y_x(z) + Y_f(z) \quad (6-46)$$

其中

$$Y_x(z) = \frac{M(z)}{D(z)}, \quad Y_f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}F(z) \quad (6-47)$$

这样,求得  $Y_x(z)$  与  $Y_f(z)$  后取逆变换即可得到系统的零输入响应、零状态响应以及全响应

$$y(n) = y_x(n) + y_f(n) \quad (6-48)$$

其中

$$y_x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[Y_x(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{M(z)}{D(z)}\right] \quad (6-49)$$

$$y_f(n) = \mathcal{Z}^{-1}[Y_f(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{N(z)}{D(z)}F(z)\right] \quad (6-50)$$

## 6.4.2 系统函数

如上所述,零状态响应  $y_f(n)$  的  $z$  变换为

$$Y_f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}F(z)$$

式中,  $F(z)$  是激励  $f(n)$  的  $z$  变换。

定义系统函数为系统零状态响应的  $z$  变换与激励的  $z$  变换之比,用  $H(z)$  表示,即

$$H(z) = \frac{Y_f(z)}{F(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (6-51)$$

由式(6-44)和式(6-45)可知,由系统的差分方程可直接求得系统函数。由式(6-51),系统的零状态响应之  $z$  变换为

$$Y_f(z) = H(z)F(z) \quad (6-52)$$

而根据卷积定理

$$y_f(n) = f(n) * h(n)$$

两边取  $z$  变换,有

$$Y_f(z) = \mathcal{Z}[h(n)]F(z)$$

因此系统函数  $H(z)$  是系统单位样值响应的  $z$  变换,即

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Z}[h(n)] &= H(z) \\ h(n) &= \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] \end{aligned} \right\} \quad (6-53)$$

或

$$h(n) \longleftrightarrow H(z)$$

于是,根据式(6-53),可以利用  $z$  变换方法方便地求解系统的单位样值响应。进一步地,求出激励的  $z$  变换,然后由式(6-52) 求出  $Y_f(z)$ ,再对  $Y_f(z)$  取逆  $z$  变换即可得到  $y_f(n)$ 。

**【例6-14】** 因果离散系统的差分方程为  $y(n) - 2y(n-1) = f(n)$ ,激励  $f(n) = 3^n U(n)$ ,  $y(0) = 2$ ,求响应  $y(n)$ 。

解:

方法一 用差分方程变换求解。

对差分方程两边取  $z$  变换得

$$\begin{aligned} Y(z) - 2z^{-1}[Y(z) + y(-1)z^1] &= F(z) \\ (1 - 2z^{-1})Y(z) &= 2y(-1) + F(z) \end{aligned}$$

解出

$$Y(z) = \frac{2y(-1)}{1 - 2z^{-1}} + \frac{F(z)}{1 - 2z^{-1}}$$

即

$$Y_x(z) = \frac{2y(-1)}{1 - 2z^{-1}}, \quad Y_f(z) = \frac{F(z)}{1 - 2z^{-1}}$$

将  $y(0) = 2$  代入差分方程得

$$y(0) - 2y(-1) = f(0)$$

$$y(-1) = 1/2$$

而

$$F(z) = \mathcal{Z} [3^n U(n)] = \frac{z}{z-3}$$

所以

$$Y_x(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2}$$

$$Y_f(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} \cdot \frac{z}{z-3} = \frac{z}{z-2} \cdot \frac{z}{z-3} = \frac{-2z}{z-2} + \frac{3z}{z-3}$$

将  $Y_x(z), Y_f(z)$  进行逆  $z$  变换, 可得

$$y_x(n) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{z}{z-2} \right] = 2^n U(n)$$

$$y_f(n) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{-2z}{z-2} + \frac{3z}{z-3} \right] = [-2(2)^n + 3(3)^n] U(n)$$

得出

$$y(n) = y_x(n) + y_f(n) = [3(3)^n - 2^n] U(n)$$

方法二 先求出零输入响应  $y_x(n)$ , 再利用系统函数求出  $y_f(n)$ 。

(1) 求  $y_x(n)$ 。求  $y_x(n)$  可以用以下两种方法。

①  $z$  变换法。将差分方程写为齐次差分方程, 即

$$y(n) - 2y(n-1) = 0$$

两边取  $z$  变换得

$$Y_x(z) - 2z^{-1} [Y_x(z) + y_x(-1)z] = 0$$

整理得

$$Y_x(z) = \frac{2y_x(-1)}{1-2z^{-1}}$$

而由前面讨论知

$$y_x(-1) = y(-1) = 1/2$$

所以

$$Y_x(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2}$$

则

$$y_x(n) = \mathcal{Z}^{-1} [Y_x(z)] = 2^n U(n)$$

② 时域法。由差分方程知, 特征值  $\lambda = 2$ , 则

$$y_x(n) = C2^n, \quad n \geq 0$$

将  $y_x(-1) = 1/2$  代入上式得  $C = 1$ , 所以

$$y_x(n) = 2^n, \quad n \geq 0$$

(2) 求  $y_f(n)$ 。由差分方程  $y(n) - 2y(n-1) = f(n)$  可得

$$h(n) - 2h(n-1) = \delta(n)$$

两边取  $z$  变换得

$$H(z) - 2z^{-1}H(z) = 1$$

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{z}{z-2}$$

由式(6-52) 得

$$\begin{aligned} Y_f(z) &= H(z)F(z) = \frac{z}{z-2} \cdot \frac{z}{z-3} \\ &= \frac{z^2}{(z-2)(z-3)} = \frac{-2z}{z-2} + \frac{3z}{z-3} \end{aligned}$$

得出

$$y_f(n) = [-2(2)^n + 3(3)^n] U(n)$$

综上所述

$$y(n) = y_x(n) + y_f(n) = [3(3)^n - 2^n] U(n)$$

### 6.4.3 离散系统因果性、稳定性与 $H(z)$ 的关系

在第5章已经知道,一个离散 LTI 系统为因果系统的充分必要条件是

$$h(n) = 0, \quad n < 0$$

或

$$h(n) = h(n)U(n)$$

即  $h(n)$  为因果序列。

由于因果序列  $z$  变换的收敛域是  $|z| > R$ , 因此, 如果系统函数的收敛域具有  $|z| > R$  的形式, 则该系统是因果的; 否则, 系统是非因果的。这样系统因果性的充分必要条件可以用  $H(z)$  表示, 即系统函数  $H(z)$  的收敛域为

$$|z| > R, \quad R \text{ 为某非负实数}$$

类似地, 可以用系统函数来研究稳定性问题。已知离散系统为稳定系统的充分必要条件是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < M, \quad M \text{ 为有界正值}$$

上式表明,  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}|$  在单位圆  $|z| = 1$  上是收敛的, 根据收敛域的定义, 单位圆在  $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$  的收敛域内。因此, 系统为稳定的充要条件可以表示为: 系统函数  $H(z)$  的收敛域包含单位圆。

如果系统是因果的, 那么稳定性的条件是  $H(z)$  的收敛域为包含单位圆在内的某个圆的外部, 由于收敛域中不能含有极点, 故  $H(z)$  的所有极点均应在单位圆内。因此, 因果系统稳定的充要条件是:  $H(z)$  的所有极点均在单位圆内。

### 6.4.4 应用双边 $z$ 变换分析离散系统举例

应用单边  $z$  变换, 只能分析因果系统在因果信号作用下的响应。如果涉及非因果系统或/和非因果信号, 则需使用双边  $z$  变换进行分析。

事实上, 离散系统的差分方程本身并不包含系统因果性、稳定性等信息, 由差分方程仅能确定  $H(z)$  的表达式, 并不能够确定其收敛域, 除非事先已经知道系统的某些特性(如因果性)。下面举例说明利用双边  $z$  变换分析离散系统。

**【例 6-15】** 某 LTI 离散系统的差分方程为  $y(n) - 2y(n-1) = f(n)$ 。

(1) 求系统函数  $H(z)$  并确定可能的单位样值响应, 说明系统的因果性与稳定性。

(2) 求由该差分方程描述的因果系统在  $f(n) = U(n+1)$  作用下的零状态响应。

**解:** (1) 由差分方程易得

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{z}{z - 2}$$

极点为  $z = 2$ 。因此, 可能的收敛域为

①  $|z| < 2$ , 此时单位样值响应  $h(n) = -2^n U(-n-1)$ , 由因果性及稳定性的充要条件, 系统是非因果稳定的。

②  $|z| > 2$ , 此时单位样值响应  $h(n) = 2^n U(n)$ , 系统是因果的、非稳定的。

(2) 方法一 时域法。

由(1)的结果知满足题设条件的系统单位样值响应为

$$h(n) = 2^n U(n)$$

因此

$$\begin{aligned} y_f(n) &= f(n) * h(n) = U(n+1) * 2^n U(n) \\ &= \left[ \sum_{m=-1}^n 2^{n-m} \right] U(n+1) = (2 \times 2^{n+1} - 1) U(n+1) \end{aligned}$$

方法二 对差分方程取双边  $z$  变换,得

$$(1 - 2z^{-1}) Y_f(z) = F(z)$$

所以 
$$Y_f(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} F(z) = z \left[ \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \right] = z \left[ \frac{2}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}} \right]$$

$$y_f(n) = \mathcal{Z}^{-1} [Y_f(z)] = 2 \times 2^{n+1} U(n+1) - U(n+1) = (2 \times 2^{n+1} - 1) U(n+1)$$

【例 6-16】 已知某反因果系统的差分方程为  $y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = f(n)$ , 若  $f(n) = U(n)$ , 求响应  $y(n)$ 。

解: 因为系统是反因果的, 故采用双边  $z$  变换。方程两边取双边  $z$  变换, 得

$$Y(z)(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}) = F(z)$$

所以 
$$Y(z) = \frac{1}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} F(z) = \frac{z^3}{(z^2 - 5z + 6)(z - 1)}$$

因为系统是反因果的, 其系统函数  $H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{z^2}{z^2 - 5z + 6}$  的收敛域为  $|z| < 2$ , 而  $F(z)$  的收敛域是  $|z| > 1$ , 因此  $Y(z)$  的收敛域为  $1 < |z| < 2$ 。将  $Y(z)$  做部分分式展开, 可得

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}z}{z-1} - \frac{4z}{z-2} + \frac{\frac{9}{4}z}{z-3}$$

$Y(z)$  的收敛域在极点  $z = 1$  的外侧, 故

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{2}z}{z-1} \right] = \frac{1}{2} U(n)$$

$Y(z)$  的收敛域在  $z=2, z=3$  这两个极点的内侧, 故

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ -\frac{4z}{z-2} + \frac{\frac{9}{4}z}{z-3} \right] = (4 \times 2^n - \frac{9}{4} \times 3^n) U(-n-1)$$

从而所求响应为 
$$y(n) = (4 \times 2^n - \frac{9}{4} 3^n) U(-n-1) + \frac{1}{2} U(n)$$

## 6.5 离散系统的频率响应

与连续系统中的频率响应类似, 在离散系统中, 也经常需要研究系统在不同频率正弦信号作用下的特性。因此, 有必要研究离散系统的频率响应特性及稳态响应。为了讨论这些问题, 我们先定义序列的傅里叶变换。

### 6.5.1 序列的傅里叶变换

序列的傅里叶变换又称离散时间傅里叶变换(Discrete Time Fourier Transform, DTFT)。

序列  $f(n)$  的  $z$  变换为

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz$$

由  $s$  到  $z$  平面的映射关系可知,  $s$  平面上的虚轴 ( $s = j\omega$ ) 对应于  $z$  平面上的单位圆 ( $|z| = 1$  或  $z = e^{j\omega}$ )。这样, 定义单位圆上的  $z$  变换就是序列的傅里叶变换, 用  $F(e^{j\omega})$  表示, 即

$$F(e^{j\omega}) = F(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jn\omega} \quad (6-54)$$

而逆变换为

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} F(z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} F(e^{j\omega}) e^{jn\omega} \cdot e^{-j\omega} d(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega}) e^{jn\omega} \cdot e^{-j\omega} \cdot j e^{j\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \end{aligned} \quad (6-55)$$

$F(e^{j\omega})$  是  $\omega$  的复函数, 可以表示为

$$F(e^{j\omega}) = |F(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} = \text{Re}[F(e^{j\omega})] + j\text{Im}[F(e^{j\omega})] \quad (6-56)$$

$F(e^{j\omega})$  表示  $f(n)$  的频域特性, 也称为  $f(n)$  的频谱,  $|F(e^{j\omega})|$  为  $f(n)$  的幅度谱,  $\varphi(\omega)$  为  $f(n)$  的相位谱, 二者都是  $\omega$  的连续函数。

### 6.5.2 离散系统的频率响应

#### 1. 定义

离散系统的单位样值响应  $h(n)$  的傅里叶变换, 称离散系统的频率响应, 用  $H(e^{j\omega})$  表示。

这样, 离散系统的单位样值响应  $h(n)$  与频率响应  $H(e^{j\omega})$  是一对傅里叶变换, 即

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) e^{-jn\omega} \quad (6-57)$$

$H(e^{j\omega})$  通常是复数, 所以一般可写成

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (6-58)$$

式中,  $|H(e^{j\omega})|$  是离散系统的幅频响应,  $\varphi(\omega)$  是离散系统的相频响应。

#### 2. 频率响应的几何确定法

频率响应除了可以按定义求出外, 还可以用几何方法简便而直观地求出。



对离散系统,若已知

$$H(z) = b_m \frac{\prod_{j=1}^M (z - z_j)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} \quad (\text{不妨设 } b_m > 0)$$

$$\text{则 } H(e^{j\omega}) = b_m \frac{\prod_{j=1}^M (e^{j\omega} - z_j)}{\prod_{i=1}^N (e^{j\omega} - p_i)} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\text{令 } e^{j\omega} - z_j = A_j e^{j\varphi_j}, \quad e^{j\omega} - p_i = B_i e^{j\theta_i}$$

$$\text{则幅频响应 } |H(e^{j\omega})| = b_m \frac{\prod_{j=1}^M A_j}{\prod_{i=1}^N B_i} \quad (6-59)$$

$$\text{相频响应 } \varphi(\omega) = \sum_{j=1}^M \varphi_j - \sum_{i=1}^N \theta_i \quad (6-60)$$

显然,式中  $A_j, \varphi_j$  分别表示  $z$  平面上零点  $z_j$  到单位圆上某点  $e^{j\omega}$  的矢量  $(e^{j\omega} - z_j)$  的长度和夹角,  $B_i, \theta_i$  表示极点  $p_i$  到  $e^{j\omega}$  的矢量  $(e^{j\omega} - p_i)$  的长度和夹角,如图 6-2 所示。

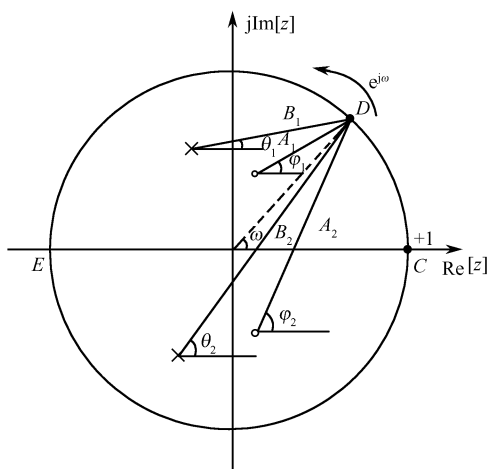


图 6-2 频率响应  $H(e^{j\omega})$  的几何确定法

如果单位圆上的  $D$  点随  $\omega$  的取值不同而不断移动,就可以得到全部的频率响应。利用这种方法,找出不同  $\omega$  取值的相应的  $D$  点,就可以用描点的方法近似描绘出系统的幅度响应和相位响应。

### 6.5.3 离散系统的稳态响应

#### 1. 单边指数信号作用下的稳态响应

设因果稳定系统的输入为  $f(n) = e^{jn\omega_0} U(n)$ , 系统函数为  $H(z)$ , 则

$$\mathcal{Z}[f(n)] = F(z) = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}$$

根据  $z$  域分析的思路,系统响应的  $z$  变换为

$$\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z) = H(z) \cdot F(z)$$

$$\text{即 } Y(z) = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} \cdot H(z) = \frac{Az}{z - e^{j\omega_0}} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - z_i}$$

其中,  $A = (z - e^{j\omega_0}) \frac{Y(z)}{z} = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega_0}} = H(e^{j\omega_0})$ ,  $z_i$  是  $\frac{H(z)}{z}$  的极点。

因为系统是稳定的,  $H(z)$  的极点都位于单位圆内。当  $n \rightarrow \infty$  时,求和项所对应的各指数衰减序列都趋于零。

若此系统的稳态响应用  $y_{ss}(n)$  表示,则

$$\mathcal{Z}[y_{ss}(n)] = Y_{ss}(z) = \frac{Az}{z - e^{j\omega_0}} = \frac{H(e^{j\omega_0})z}{z - e^{j\omega_0}}$$

将上式取逆变换得

$$y_{ss}(n) = H(e^{j\omega_0}) e^{jn\omega_0} U(n) \quad (6-61)$$

## 2. 正弦信号作用下的稳态响应

设因果稳定系统的输入为

$$f(n) = \sin n\omega_0 \cdot U(n)$$

其  $z$  变换为 
$$F(z) = \mathcal{Z}[f(n)] = \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} = \frac{z \sin \omega_0}{(z - e^{j\omega_0})(z - e^{-j\omega_0})}$$

于是系统响应的  $z$  变换为

$$Y(z) = F(z)H(z) = \frac{z \sin \omega_0}{(z - e^{j\omega_0})(z - e^{-j\omega_0})} H(z)$$

因为系统是稳定的,  $H(z)$  的极点均位于单位圆内, 它不会与  $F(z)$  的极点重合。所以

$$Y(z) = \frac{az}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{bz}{z - e^{-j\omega_0}} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - z_i} \quad (6-62)$$

式中 
$$a = (z - e^{j\omega_0}) \frac{Y(z)}{z} \Big|_{z=e^{j\omega_0}} = \frac{H(e^{j\omega_0})}{2j}, \quad b = -\frac{H(e^{-j\omega_0})}{2j}$$

$z_i$  是  $\frac{H(z)}{z}$  的极点。

注意到  $H(e^{j\omega_0})$  与  $H(e^{-j\omega_0})$  是复数共轭的, 令

$$H(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| e^{j\varphi(\omega_0)}, \quad H(e^{-j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| e^{-j\varphi(\omega_0)}$$

代入式(6-62)得 
$$Y(z) = \frac{|H(e^{j\omega_0})|}{2j} \left( \frac{ze^{j\varphi}}{z - e^{j\omega_0}} - \frac{ze^{-j\varphi}}{z - e^{-j\omega_0}} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{A_i z}{z - z_i}$$

显然,  $Y(z)$  的逆变换为

$$y(n) = \frac{|H(e^{j\omega_0})|}{2j} (e^{j(n\omega_0+\varphi)} - e^{-j(n\omega_0+\varphi)}) U(n) + \left( \sum_{i=1}^N A_i z_i^n \right) U(n)$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 后一项趋于零, 故稳态响应为

$$y_{ss}(n) = |H(e^{j\omega_0})| \sin(n\omega_0 + \varphi) U(n) \quad (6-63)$$

如果输入为双边序列, 则输出也是双边的, 结果与式(6-63)相似。

**【例 6-17】** 已知某 LTI 因果系统的差分方程为

$$y(n) - y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = f(n-1)$$

试求: (1) 系统函数  $H(z)$  及频率响应  $H(e^{j\omega})$ ; (2) 单位样值响应  $h(n)$ ; (3) 若激励  $f(n) = 5\cos(n\pi)$ , 求稳态响应  $y_{ss}(n)$ 。

**解:** (1) 由差分方程得

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - z + 0.5}$$

其频率响应

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{2j\omega} - e^{j\omega} + 0.5}$$

根据  $H(z)$  的零、极点分布, 通过几何方法可以大致估计出频率响应的形状, 如图 6-3 所示。

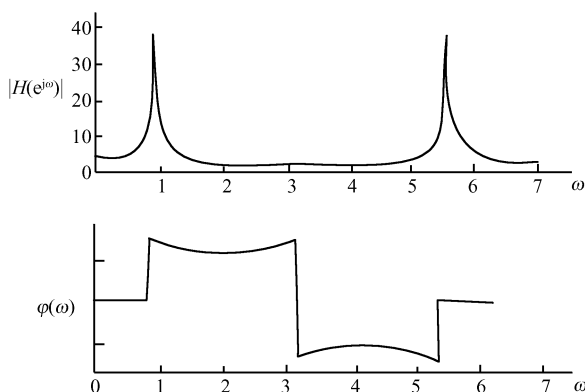


图 6-3 例 6-17 的幅度响应和相位响应曲线

(2) 由前面讨论可得

$$H(z) = \frac{z}{z^2 - z + 0.5} = \frac{-jz}{\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)} + \frac{jz}{\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)}$$

对上式逆变换得

$$h(n) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] = -j\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^n U(n) + j\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^n U(n)$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) U(n)$$

(3) 因为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{2j\omega} - e^{j\omega} + 0.5}$$

故当激励  $f(n) = 5\cos(n\pi)$  时,  $\omega = \pi$ , 则

$$H(e^{j\pi}) = \frac{e^{j\pi}}{e^{2j\pi} - e^{j\pi} + 0.5} = -0.4 = 0.4e^{j\pi}$$

仿照式(6-63), 稳态响应为

$$y_{ss}(n) = 5 |H(e^{j\pi})| \cos(n\pi + \pi) = -2\cos n\pi$$

## 6.6 MATLAB 应用举例

### 6.6.1 利用 MATLAB 计算 $z$ 变换和逆 $z$ 变换

MATLAB 中, 可以利用函数 `ztrans` 和 `iztrans` 分别计算符号函数的  $z$  变换和逆  $z$  变换, 所得结果也是符号函数, 而非数值结果。其一般调用格式如下

$$F = \text{ztrans}(f), F = \text{iztrans}(F)$$

其中,  $f$  和  $F$  分别是时间序列和  $z$  变换的数学表达式。

**【例 6-18】** 用 MATLAB 编程: (1) 求序列  $a^n U(n)$  的  $z$  变换; (2) 求  $F(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$  的逆  $z$  变换。

**解:** 程序如下:

```
% Program ch6_1
format rat
syms a n z pi
f = a.^n;
Fz = ztrans(f,n,z);
Fz = simple(Fz)
F = z./(z+1)/(z+2);
fn = iztrans(F)
```

程序运行结果为

```
Fz = -z/(-z+a)
fn = (-1)^n - (-2)^n
```

### 6.6.2 部分分式展开的 MATLAB 实现

如果  $z$  变换可以用如下的有理分式表示

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

则在求  $F(z)$  的逆变换时,可以将  $F(z)$  展开为部分分式之和,然后再取其逆变换。用函数 `residuez` 可以实现部分分式展开。其一般调用格式为

```
[r,p,k] = residuez(num,den)
```

其中, $r$  是由各部分分式分子系数组成的向量, $p$  为极点向量, $k$  则表示  $F(z)$  的分子多项式除以分母多项式所得的商多项式。若  $F(z)$  为  $z^{-1}$  的真分式,则  $k$  为零。

**【6-19】** 用 MATLAB 编程求  $F(z) = \frac{2z^4 + 3z^3}{(z+1)^2(z+2)(z+3)}$  的部分分式展开式。

解:程序如下。

```
% Program ch6_2
a = poly([-1 -1 -2 -3]);
b = [2 3];
[r,p,k] = residuez(b,a)
```

程序运行结果为

```
r = 6.7500   -4.0000   -0.2500   -0.5000
p = -3.0000   -2.0000   -1.0000   -1.0000
k = []
```

于是  $F(z)$  的部分分式展开式为

$$F(z) = \frac{6.75z}{z+3} + \frac{-4z}{z+2} + \frac{-0.25z}{(z+1)} + \frac{-0.5z^2}{(z+1)^2}$$

### 6.6.3 利用 MATLAB 求解离散系统的频率响应

MATLAB 函数 `freqz` 用于求解离散系统的频率响应,其一般调用形式为

```
H = freqz(b,a,w)
```

其中  $a, b$  为差分方程左、右端的系数向量, $w$  是欲求响应的频率抽样点构成的向量。

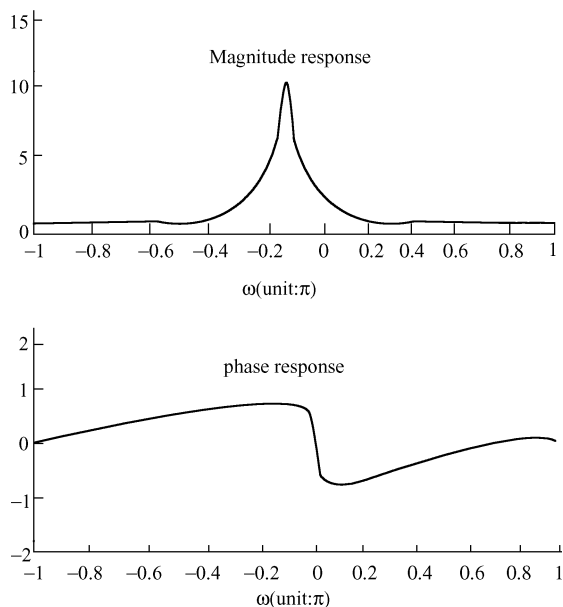
【例 6-20】 已知离散系统的差分方程为

$$y(n) - 0.3y(n-1) - 0.54y(n-2) = f(n) + 0.7f(n-1) + 0.12f(n-2)$$

用 MATLAB 求解该系统的频率响应,画出  $-\pi \sim \pi$  区间的幅度响应和相位响应。

解:程序如下:

```
% Program ch6_3
b = [1 0.7 0.12];
a = [1 -0.3 -0.54];
fs = 0.01 * pi;
w = -pi:fs:pi;
H = freqz(b,a,w);
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,abs(H));
title('Magnitude response');
xlabel('\omega (unit: \pi)');
box off;
subplot(2,1,2);
plot(w/pi,angle(H));
title('Phase response');
xlabel('\omega (unit: \pi)');
box off;
```



结果如图 6-4 所示。

图 6-4 例 6-20 的图

#### 6.6.4 系统函数的零极点

系统函数的零点和极点可以通过 MATLAB 函数 `roots` 求得,也可以借助函数 `tf2zp` 得到。它们的调用格式为

```
p = roots(A)
[z,p,k] = tf2zp(b,a);
```

其中,  $A$  为多项式系数向量,  $p$  为极点向量,  $z$  为零点向量,  $k$  的含义同 6.6.2 节,  $b$  和  $a$  分别为系统函数分子、分母多项式系数向量。

系统函数的零极点图则可以用函数 `zplane` 画出。其调用格式为

```
zplane(b,a)
```

$b$  和的  $a$  含义同上。

【例 6-21】 已知某因果系统的系统函数为

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^3 - 0.5z^2 + 0.5z + 0.2},$$

- (1) 画出系统函数的零极点图,判断系统是否稳定;
- (2) 求系统的单位样值响应,画出前 30 个样本;
- (3) 求系统的频率响应,画出  $0 \sim 2\pi$  区间的幅度响应和相位响应曲线。

解:程序如下。

```
% program ch6_4
b = [0 1 0 -1];
```

```

a = [1 -0.5 0.5 0.2];
subplot(2,2,1);
zplane(b,a);
box off;
N=30;
[h,n] = impz(b,a,N);
subplot(2,2,2);
stem(n,h,'MarkerSize',4,'MarkerFace','k');
title('Impulse response');
xlabel('n');
box off;
w=0:0.01*pi:pi;
H = freqz(b,a,w);
subplot(2,2,3);
plot(w/pi,abs(H));
title('Magnitude response');
xlabel('Frequency \omega (unit:\pi)');
box off;
subplot(2,2,4);
plot(w/pi,unwrap(angle(H)));
title('Phase response');
xlabel('Frequency \omega (unit:\pi)');
box off;

```

程序运行后,所得各部分图形如图 6-5 所示。根据极点位置可知,系统是稳定的。

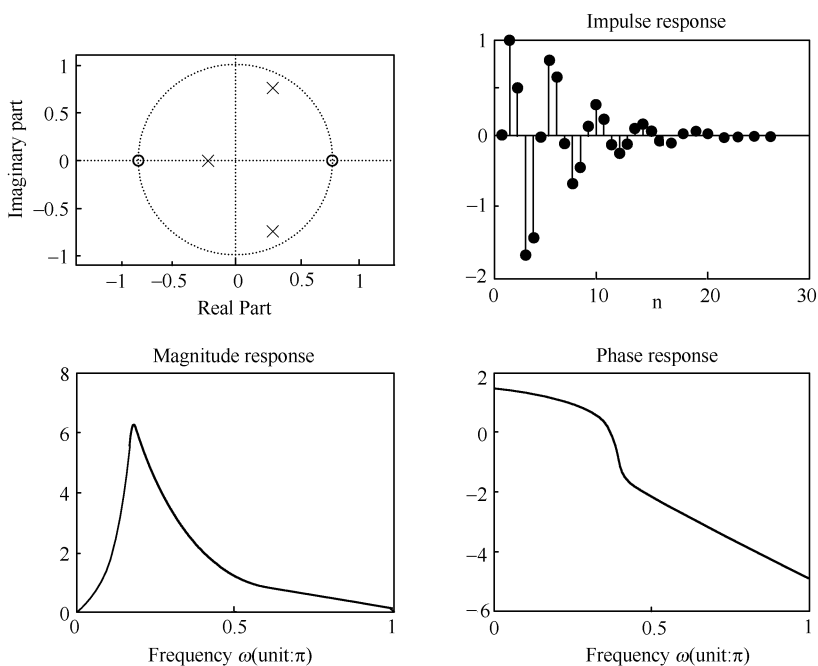


图 6-5 例 6-21 的图

## 本章关键概念小结

- $z$  变换  $F(z)$  是关于复变量  $z$  的函数。使  $F(z)$  存在的  $z$  的取值区域,称为  $z$  变换的收敛域。
- 双边  $z$  变换可能与多个信号对应,不同之处在于对应的收敛域不同。
- 单边  $z$  变换是双边  $z$  变换的特例,其收敛域是  $z$  平面上某个圆的外部且是唯一的。
- 利用部分分式展开法和一些已知信号的  $z$  变换,可以求出有理函数的逆  $z$  变换。
- 用单边变换可以求解因果系统的差分方程在因果信号下的响应。过程如下:
  - (1) 计算输入信号的  $z$  变换;
  - (2) 计算差分方程的  $z$  变换;
  - (3) 将输入信号的  $z$  变换和初始条件代入差分方程的  $z$  变换;
  - (4) 求出响应的  $z$  变换;
  - (5) 通过计算逆变换,求出响应。
- 系统函数是零状态响应的  $z$  变换与输入信号的  $z$  变换之比;它和系统的单位样值响应是  $z$  变换对。
- 因果系统稳定的充要条件是系统函数的所有极点都在单位圆内;对一般系统,这个稳定性条件是系统函数  $H(z)$  的收敛域包含单位圆。
- 除初始条件外,系统函数完整地描述了 LTI 因果系统的特征。
- 如果分析涉及非因果系统和/或非因果信号,需使用双边  $z$  变换。
- 序列的傅里叶变换等于其  $z$  变换在单位圆上求值。
- 系统的频率响应是单位样值响应的傅里叶变换。对稳定系统,将  $e^{j\omega}$  代替  $H(z)$  中的  $z$  即得到系统的频率响应。
- 稳定系统在正弦信号作用下的稳态响应仍是同频率的正弦序列,但振幅和初相位由频率响应确定。

## 习题

6.1 根据定义求下列序列的双边  $z$  变换,画出其零、极点图,并注明收敛域。

$$\begin{aligned} (1) f(n) &= \delta(n-2) & (2) f(n) &= -\left(\frac{1}{2}\right)^n U(-n-1) \\ (3) f(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n [U(n) - U(n-3)] & (4) f(n) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} \\ (5) f(n) &= -U(-n-1) & (6) f(n) &= 2^n U(n) + 0.5^n U(n) \end{aligned}$$

6.2 根据定义求下列单边序列的  $z$  变换,画出其零、极点图,并注明收敛域。

$$\begin{aligned} (1) f(n) &= (-1)^n U(n) & (2) f(n) &= \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) U(n) \\ (3) f(n) &= U(n) - U(n-2) & (4) f(n) &= (0.5^n + 4^n) U(n) \end{aligned}$$

6.3\* 已知信号  $f(n)$  的  $z$  变换为  $F(z) = \frac{-5z}{(z-2)(3z-1)}$ ,求在下列收敛域情况下所对应的序列。

$$(1) \frac{1}{3} < |z| < 2 \quad (2) |z| > 2 \quad (3) |z| < 1/3$$

6.4 试利用  $z$  变换的性质求下列信号的  $z$  变换。

$$\begin{aligned}
 (1) f(n) &= [1 + (-1)^n]U(n) & (2) f(n) &= 0.5^n U(n) + \delta(n-2) \\
 (3) f(n) &= \sin \omega n U(n) & (4) f(n) &= U(n) - U(n-2) + U(n-4) \\
 (5) f(n) &= 0.5^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)U(n) & (6) f(n) &= 2^n e^{-3n} U(n) \\
 (7) f(n) &= 3^n e^{-2n} \sin \omega n U(n) & (8) f(n) &= \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)U(n)
 \end{aligned}$$

6.5 试利用  $z$  变换的性质求下列信号的  $z$  变换。

$$\begin{aligned}
 (1) f(n) &= (n-2)U(n) & (2) f(n) &= n \cos \omega n U(n) \\
 (3) f(n) &= n(n-1)U(n-1) & (4) f(n) &= (n-2^n)^2 U(n) \\
 (5) f(n) &= e^{j\omega n} U(-n) & (6) f(n) &= e^{-2n} U(-n) \\
 (7) f(n) &= n2^{n-1} U(n) & (8) f(n) &= (n+2)U(n+1) \\
 (9) f(n) &= \sum_{k=0}^n k^2 & (10) f(n) &= 2^n U(-n-2) \\
 (11) f(n) &= n(n-1)U(-n+1) & (12) f(n) &= 0.5^n (n-1)U(n-1)
 \end{aligned}$$

6.6 已知信号  $f(n)$  的单边  $z$  变换  $F(z)$  如下,试求  $f(n)$  的初值  $f(0)$  和终值  $f(\infty)$ 。

$$\begin{aligned}
 (1) F(z) &= \frac{z^2}{z^2 + 0.5^2} & (2) F(z) &= \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - z - 2} & (3) F(z) &= \frac{2z^2 + 2z + 2}{2z^2 - z - 1} \\
 (4) F(z) &= \frac{2z^2}{2z^2 - 3z + 1} & (5) F(z) &= \frac{z^{N+1}}{(z-1)(z-0.5)^N} & (6) F(z) &= \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - 3z + 2} \\
 (7) F(z) &= \frac{z}{6z^2 - z - 1} & (8) F(z) &= \frac{2z-1}{z^2 - z - 6}
 \end{aligned}$$

6.7\* 根据  $z$  变换和拉氏变换间的关系

$$\begin{aligned}
 (1) \text{ 由 } f(t) &= e^{-2t} U(t) \text{ 的 } F(s) = \frac{1}{s+2}, \text{ 求 } f(n) = e^{-2n} U(n) \text{ 的 } z \text{ 变换;} \\
 (2) \text{ 由 } f(t) &= te^{-2t} U(t) \text{ 的 } F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}, \text{ 求 } f(n) = ne^{-2n} U(n) \text{ 的 } z \text{ 变换。}
 \end{aligned}$$

6.8 已知因果序列  $f(n)$  的  $z$  变换为  $F(z)$ ,求下列信号的  $z$  变换。

$$\begin{aligned}
 (1) e^{-an} f(n) & & (2) n^2 f(n) & & (3) \sum_{k=0}^n \alpha^k f(k) & & (4) f(n-1)U(n) \\
 (5) f(n-1)U(n-1) & & (6) f(n+1)U(n) & & (7) f(n+1)U(n+1) & & (8) \alpha^n \sum_{k=0}^n f(k)
 \end{aligned}$$

6.9 求下列单边  $z$  变换所对应的序列  $f(n)$ 。

$$\begin{aligned}
 (1) F(z) &= \frac{z^2}{z^2 - z - 2} & (2) F(z) &= \frac{-5z}{(4z-1)(3z-2)} & (3) F(z) &= \frac{2z^2 - 3z + 1}{z^2 - 4z - 5} \\
 (4) F(z) &= \frac{4z}{(z-1)^2(z+1)} & (5) F(z) &= \frac{2z^3 + 4z^2 + 2}{2z^3 - 3z^2 + z} & (6) F(z) &= \frac{z^{-1}}{(1-6z^{-1})^2}
 \end{aligned}$$

6.10 已知因果序列的  $z$  变换如下,求所对应的序列  $f(n)$ 。

$$\begin{aligned}
 (1) F(z) &= \frac{4z^2 - 2z}{4z^2 - 1} & (2) F(z) &= \frac{4z^3 + 7z^2 + 3z + 1}{2z^3 + 2z^2 + 2z} & (3) F(z) &= \frac{z^3 + 6}{z^3 + z^2 + 4z + 4} \\
 (4) F(z) &= \frac{z^2 + 2z}{(z-2)^3} & (5) F(z) &= z^{-1} + 2z^{-3} + 4z^{-5} & (6) F(z) &= \frac{z^3}{(z-0.5)^2(z-1)}
 \end{aligned}$$

6.11\* 已知序列  $f_1(n) = (0.5^n + 1)U(n)$ ,试求  $f(n) = \sum_{k=0}^n f_1(k)$  的  $z$  变换  $F(z)$ 。

6.12\* 试用  $z$  变换求  $0 \sim n$  的全部整数和  $y(n) = \sum_{k=0}^n k$ 。



6.13\* 已知序列  $f(n)$  为因果序列,且有  $f(n) = -nU(n) + \sum_{k=0}^n f(k)$ , 试求  $f(n)$ 。

6.14\* 已知序列  $f(n)$  为因果序列,且有  $\sum_{k=0}^{n+1} f(k) = nU(n) * 0.5^n U(n)$ , 试求  $f(n)$ 。

6.15\* 上题中若改成  $\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = nU(n) * 0.5^n U(n)$ , 则  $f(n)$  如何?

6.16 已知离散时间信号  $f(n)$  的  $z$  变换为  $F(z)$ , 且

(1)  $f(n)$  是实的因果序列; (2)  $F(z)$  只有两个极点,其中之一为  $z = 0.5e^{j\frac{\pi}{3}}$ ;

(3)  $F(z)$  在原点有二阶零点; (4)  $F(1) = 8/3$ ;

试求  $F(z)$  并指出其收敛域。

6.17 已知某离散时间 LTI 系统的单位序列响应为  $h(n) = (0.5)^n U(n)$ , 求下列信号输入时系统的响应  $y(n)$ 。

(1)  $f(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n U(n)$  (2)  $f(n) = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n U(n)$  (3)  $f(n) = (-1)^n U(n)$

6.18 已知系统函数  $H(z)$  及激励信号  $f(n)$  如下, 求系统的零状态响应。

(1)  $H(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$ ,  $f(n) = 3^n U(n)$ ; (2)  $H(z) = \frac{2}{2 + z^{-1} - z^{-2}}$ ,  $f(n) = 9(2)^n U(n)$

(3)  $H(z) = \frac{z}{z^2 + z + 1}$ ,  $f(n) = 3U(n)$ ; (4)  $H(z) = \frac{1 + 2z^{-2}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}}$ ,  $f(n) = U(n)$

6.19 离散时间 LTI 系统的框图如图 6-6 所示, 求:

(1) 系统函数  $H(z)$ ; (2) 系统单位样值响应  $h(n)$ ; (3) 系统单位阶跃响应  $g(n)$ 。

6.20 离散时间 LTI 系统的框图如图 6-7 所示, 求:

(1) 系统函数  $H(z)$ ; (2) 系统单位样值响应  $h(n)$ ; (3) 系统单位阶跃响应  $g(n)$ 。

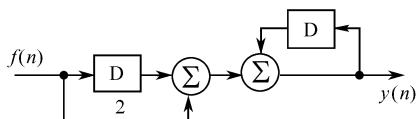


图 6-6

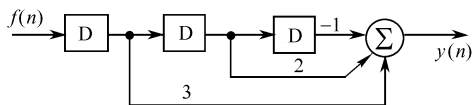


图 6-7

6.21 已知离散时间 LTI 系统的单位阶跃响应为  $g(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{3}{2}\right)^n\right] U(n)$ , 求该系统的系统函数  $H(z)$  和单位样值响应  $h(n)$ 。

6.22 若一离散时间 LTI 系统对输入信号  $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n U(n) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} U(n-1)$ , 所产生的响应为  $y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n U(n)$ , 求该系统的差分方程及单位样值响应  $h(n)$ 。

6.23 若一离散时间 LTI 系统对输入信号  $f(n) = (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n U(n)$ , 所产生的响应为  $y(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n U(n)$ , 求为使系统的输出为  $y(n) = \delta(n) - \left(-\frac{1}{2}\right)^n U(n)$ , 系统的输入  $f(n)$ 。

6.24\* 已知离散时间 LTI 系统对输入信号  $U(n)$  的零状态响应为  $y_1(n)$ , 当输入为某信号  $f(n)$  时, 其零状态响应为  $y(n) = \sum_{k=0}^n y_1(k)$ , 试求该激励信号  $f(n)$ 。

6.25\* 试利用三种求逆  $z$  变换的方法, 求下列  $F(z)$  的逆  $z$  变换  $f(n)$ 。

(1)  $F(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z-2)}$ ,  $|z| > 2$  (2)  $F(z) = \frac{-5z}{(z-2)(3z-1)}$ ,  $\frac{1}{3} < |z| < 2$

(3)  $F(z) = \frac{-3z}{2z^2 - 5z + 2}$ ,  $|z| < 0.5$

6.26\* 已知描述 LTI 离散系统的差分方程为

$$y_1(n) = f(n) + y_2(n), \quad y_2(n) = -5y_1(n-1) - 6y_1(n-2), \quad y(n) = y_1(n) + y_1(n-1)$$

- (1) 求系统函数  $H(z)$ ; (2) 求系统的差分方程; (3) 求系统的单位样值响应  $h(n)$ ;
- (4) 求当激励为  $f(n) = (0.5^n + 0.25^n)U(n)$  时, 系统的零状态响应  $y_f(n)$ 。

6.27 一 LTI 离散系统的系统框图如图 6-8 所示, 求

- (1) 系统函数  $H(z)$ ; (2) 系统的差分方程; (3) 系统的单位样值响应  $h(n)$ ;
- (4) 若已知激励为  $f(n) = \delta(n) + 0.5^n U(n)$  时, 求系统的零状态响应  $y_f(n)$ 。

6.28 一 LTI 离散系统的系统框图如图 6-9 所示, 求:

- (1) 系统函数  $H(z)$ ; (2) 系统的差分方程; (3) 系统的单位样值响应  $h(n)$ ;
- (4) 若已知激励为  $f(n) = U(n) + 2^n U(n)$  时, 求系统的零状态响应  $y_f(n)$ 。

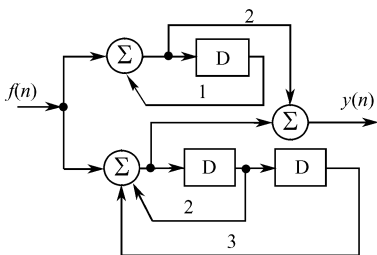


图 6-8

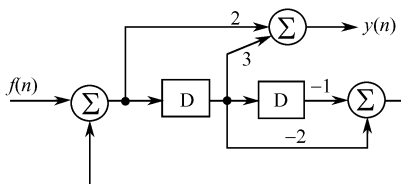


图 6-9

6.29 已知某离散时间 LTI 因果系统的零、极点图如图 6-10 所示, 且系统的  $H(\infty) = 2$ , 求:

- (1) 系统函数  $H(z)$ ; (2) 系统的单位样值响应  $h(n)$ ; (3) 系统的差分方程;
- (4) 若已知激励为  $f(n)$  时, 系统的零状态响应为  $y(n) = 2^n U(n)$ , 求  $f(n)$ 。

6.30 已知某离散时间 LTI 因果系统的零、极点图如图 6-11 所示, 且系统的  $H(\infty) = 4$ 。

- (1) 求系统函数  $H(z)$ ; (2) 求系统的单位样值响应  $h(n)$ ; (3) 求系统的差分方程;
- (4) 若已知激励为  $f(n)$  时, 系统的零状态响应为  $y(n) = U(n)$ , 求  $f(n)$ 。

6.31 已知某离散时间 LTI 因果系统的零、极点图如图 6-12 所示, 且系统的  $H(\infty) = 4$ 。

- (1) 求系统函数  $H(z)$ ; (2) 求系统的单位样值响应  $h(n)$ ; (3) 求系统的差分方程;
- (4) 若已知激励为  $f(n)$  时, 系统的零状态响应为  $y(n) = 0.5^n U(n)$ , 求  $f(n)$ 。

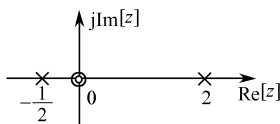


图 6-10

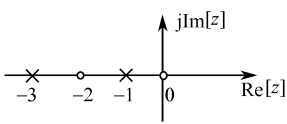


图 6-11

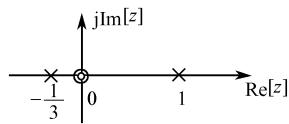


图 6-12

6.32 某 LTI 离散系统框图如图 6-13 所示, 问当  $K$  为何值时系统稳定?

6.33 一离散 LTI 系统的系统框图如图 6-14 所示, 问当  $K$  为何值时系统稳定?

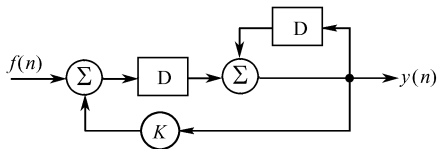


图 6-13

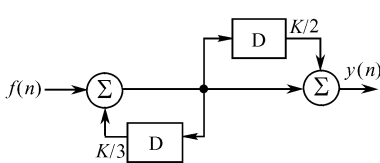


图 6-14

6.34 已知某离散 LTI 系统的差分方程为

$$2y(n) - (K-1)y(n-1) + y(n-2) = f(n) + 3f(n-1) + 2f(n-2)$$

求系统的稳定条件。

6.35 已知某离散 LTI 反馈系统框图如图 6-15 所示,其中  $H_1(z) = \frac{2}{2-z^{-1}}$ ,  $H_2(z) = 1 - Kz^{-1}$ , 求使系统稳定的  $K$  的取值范围。

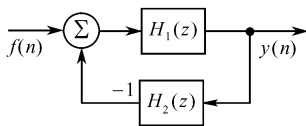


图 6-15

6.36\* 已知 LTI 离散系统的差分方程为

$$y(n) - \frac{\sqrt{2}}{2}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2) = f(n) - f(n-1)$$

(1) 求系统的频率响应  $H(e^{j\omega})$ ;

(2) 若输入为  $f(n) = (-1)^n$ ,  $(-\infty < n < \infty)$ , 求系统输出  $y(n)$ ;

(3) 若输入为  $f(n) = (-1)^n U(n)$ , 求系统输出  $y(n)$ 。

6.37\* 已知 LTI 离散系统的差分方程为

$$y(n) + 0.5y(n-1) = f(n) + 2f(n-1)$$

求当激励为  $f(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  时, 系统的稳态响应  $y_{ss}(n)$ 。

6.38\* 已知一阶离散系统的系统框图如图 6-16 所示。其中  $\boxed{z^{-1}}$  表示延迟单元。求:

(1) 激励为  $f(n) = U(n)$  时的零状态响应, 并指出其暂态响应和稳态响应;

(2) 激励为  $f(n) = e^{jn} U(n)$  时的零状态响应, 并指出其暂态响应和稳态响应;

(3) 激励为  $f(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) U(n)$  时的稳态响应。

6.39\* 已知 LTI 离散系统的系统函数  $H(z) = \frac{2z(z-2)}{8z^2 + 2z - 1}$ , 求当激励为  $f(n) = 16\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$  时, 系统的稳态响应  $y_{ss}(n)$ 。

6.40\* 已知一阶离散系统的系统框图如图 6-17 所示, 求:

(1) 系统的差分方程; (2) 若系统激励为  $f(n) = U(n) + \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \cos(n\pi)$ , 求稳态响应。

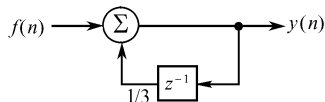


图 6-16

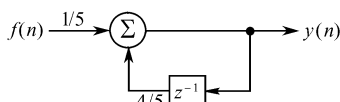


图 6-17

## 上机练习

6.1 利用 residues 函数, 求  $F(z) = \frac{2z^4 + 16z^3 + 44z^2 + 56z + 32}{3z^4 + 3z^3 - 15z^2 + 18z - 12}$  的逆变换。

6.2 已知离散系统的系统函数为  $H(z) = \frac{z(2z+1)}{2z^2 + z - 3}$ , 系统输入为  $f(n) = 0.5^n U(n)$ ,  $y(-1) = 1$ ,  $y(-2) = 2$ , 试用 filter 函数求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

6.3 分别用 impz 函数和 filter 函数, 求系统  $H(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2z + 2}$  的单位样值响应, 比较两种方法所得的结果, 求系统的频率响应, 画出  $0 \sim 2\pi$  之间的幅频响应。

6.4 一个离散系统的 5 个零点为  $z = -0.7 \pm j0.5$ ,  $z = -0.8 \pm j0.15$  和  $z = -0.85$ , 其 6 个极点为  $z = 0.8$ ,  $z = 0.7$ ,  $z = 0.75 \pm j0.2$  和  $z = 0.85 \pm j0.4$ 。系统的直流增益为 0.9。

(1) 求系统的系统函数;

(2) 画出系统函数的零、极点图, 判断系统是否稳定;

(3) 画出系统的幅频响应和相频响应。

# 第 7 章 系统的状态变量分析

## 内 容 提 要

本章首先介绍系统的信号流图,讨论用信号流图描述系统,以及用信号流图模拟系统的方法。之后介绍系统的另一分析方法——状态变量分析法,主要讨论状态变量方程和输出方程的建立和求解。

## 7.1 系统的信号流图

### 7.1.1 信号流图

对于系统的描述方法,在第 1 章中已经讨论过了。连续系统和离散系统都可以用模拟框图来描述,即由一些模拟器件组成,如加法器、乘法器、积分器、延迟单元等。在研究了系统的复频域和  $z$  域分析之后,系统的模拟框图除了时域形式之外,还有复频域框图(连续系统)和  $z$  域框图(离散系统)。图 7-1 所示为  $s$  域和  $z$  域中的模拟器件模型,图 7-2 是  $s$  域和  $z$  域系统模

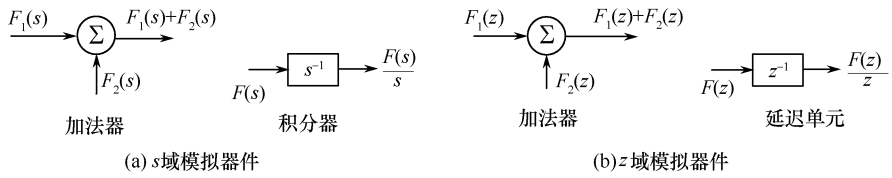


图 7-1  $s$  域和  $z$  域模拟器件模型

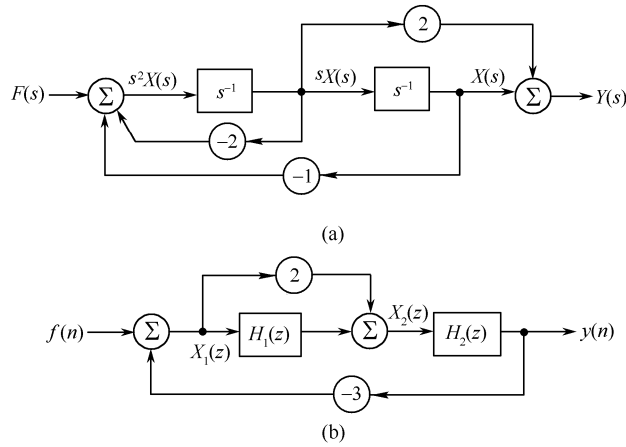


图 7-2  $s$  域和  $z$  域的模拟框图举例

拟框图的例子。由模拟框图可以写出这两个系统的系统函数来。对图 7-2(a) 所示连续系统, 设中间变量为  $X(s)$ , 则有

$$s^2 X(s) = F(s) - 2sX(s) - X(s)$$

$$Y(s) = 2sX(s) + X(s)$$

联立以上两式可得

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{2s+1}{s^2+2s+1}$$

对图 7-2(b) 所示离散系统, 设中间变量为  $X_1(z)$  和  $X_2(z)$ , 则有

$$X_1(z) = F(z) - 3Y(z)$$

$$X_2(z) = 2X_1(z) + X_1(z) \cdot H_1(z) = [2 + H_1(z)] X_1(z)$$

$$Y(z) = X_2(z) \cdot H_2(z)$$

联立以上三式可得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{[2 + H_1(z)] \cdot H_2(z)}{1 + 3[2 + H_1(z)] \cdot H_2(z)}$$

可见,  $s$  域或  $z$  域的模拟框图完全可以描述一个系统的系统函数, 即可描述一个系统。这里也可看出,  $s$  域和  $z$  域有很对偶的关系。

不过当一个系统比较复杂, 如含多个子系统(如图 7-2(b) 所示)并包含多个加法器时, 模拟框图及由模拟框图写出系统函数就会变得很复杂。为了简化模拟框图, 出现了线性系统的信号流图(signal flow graphs)表示与分析方法。信号流图是由美国麻省理工学院的梅森(Mason)于 20 世纪 50 年代提出的, 它在系统的分析与设计中得到广泛应用。与模拟框图相比, 信号流图方法更加简明清楚, 系统函数的计算过程明显简化。此外, 借助信号流图研究系统的状态变量分析也显示出许多优点, 这将在本章的后续部分介绍。

系统的信号流图实际上是对  $s$  域或  $z$  域模拟框图的简化, 用有方向的线段表示信号的传输路径, 有向线段的起始点表示系统中变量或信号, 将起点信号与终点信号之间的转移关系标注在有向线段箭头的上方。加法器省略掉并用一个节点表示。我们将图 7-2 所示的连续系统和离散系统的模拟框图转化为对应的信号流图, 如图 7-3 所示。

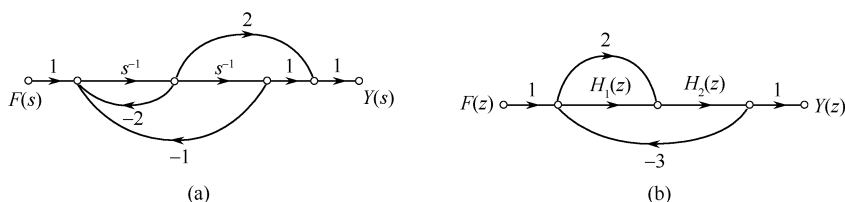


图 7-3 系统的信号流图

为了更好地研究信号流图, 先给出以下一些术语以方便使用。

节点: 表示信号或变量的点, 同时具有加法器的功能。

源点: 只有信号输出的节点, 对应输入信号。

阱点: 只有信号输入的节点, 对应输出信号。

混合节点: 既有信号输入, 又有信号输出的节点。

支路: 节点之间的有向线段, 支路上的标注称为支路增益或转移函数。

通路: 沿支路箭头方向通过各相连支路的途径, 不允许逆箭头方向。

开通路: 与任一节点相交不多于一次的通路。

前向通路: 从源点到阱点方向的前通路。

环路:通路的终点就是起点,并且与任何其他节点相交不多于一次的闭合通路。

不接触环路:两环路之间没有任何公共节点。

前向通路增益:在前向通路中,各支路增益的乘积。

环路增益:在环路中各支路增益的乘积。

由图 7-3 可以总结几点信号流图的特性:

- (1) 节点有加法器功能,并把和信号传送到所有输出支路。
- (2) 支路表示了一个信号与另一个信号的函数关系,信号只能沿箭头方向流过。
- (3) 给定一个系统,其信号流图形式不唯一。

(4) 连续系统的信号流图表示与分析方法同离散系统的完全一致,只是连续系统在  $s$  域中,积分器的增益用  $s^{-1}$  表示,系统函数用  $H(s)$  表示;而离散系统在  $z$  域中,延迟单元的增益用  $z^{-1}$  表示,系统函数用  $H(z)$  表示。所以下面所叙述的信号流图的相关内容均适用于连续和离散两种系统。

我们知道,有了模拟框图,就可以求出系统的系统函数。那么有了信号流图,同样可以求出系统的系统函数,这个过程可以用前面所用到的方法(称为方程法),但当系统复杂时,这种方法比较麻烦。下面介绍用梅森公式求系统函数的方法。

梅森公式的形式为 
$$H = \frac{1}{\Delta} \sum_k g_k \Delta_k \quad (7-1)$$

式中:

(1)  $H$  可以是  $H(s)$ ,也可以是  $H(z)$ ,所以只用  $H$  表示;

(2)  $\Delta$  称为信号流图的特征行列式,其定义为

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (\text{所有不同环路的增益之和}) + (\text{每两个互不接触环路增益乘积之和}) - \\ &\quad (\text{每三个互不接触环路增益乘积之和}) + \cdots \\ &= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \cdots \end{aligned} \quad (7-2)$$

(3)  $k$  表示第  $k$  条前向通路的标号;

(4)  $g_k$  为第  $k$  条前向通路增益;

(5)  $\Delta_k$  为第  $k$  条前向通路特征行列式的余子式。它是除去与第  $k$  条前向通路相接触的环路外,余下信号流图的特征行列式。

这里不对梅森公式进行证明,仅举出应用实例。

【例 7-1】 求图 7-4 所示系统的系统函数。

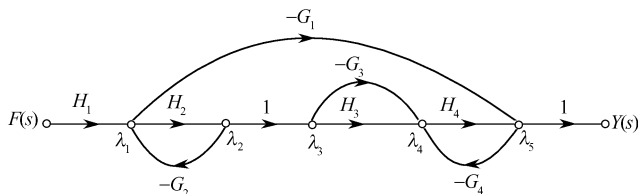


图 7-4 例 7-1 的信号流图

解:设信号流图中各个节点为  $\lambda_1 \sim \lambda_5$ ,如图 7-4 中所标注。利用梅森公式有

(1) 求流图的特征行列式。

环路 
$$L_1 = (\lambda_1 \longrightarrow \lambda_2 \longrightarrow \lambda_1) = -H_2 G_2$$

$$L_2 = (\lambda_3 \rightarrow \lambda_4 \rightarrow \lambda_3) = -H_3 G_3$$

$$L_3 = (\lambda_4 \rightarrow \lambda_5 \rightarrow \lambda_4) = -H_4 G_4$$

$$L_4 = (\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 \rightarrow \lambda_3 \rightarrow \lambda_4 \rightarrow \lambda_5 \rightarrow \lambda_1) = -H_2 H_3 H_4 G_1$$

其中  $L_1$  和  $L_2$ ,  $L_1$  和  $L_3$  是不接触环路, 所以

$$\Delta = 1 + (H_2 G_2 + H_3 G_3 + H_4 G_4 + H_2 H_3 H_4 G_1) + (H_2 G_2 H_3 G_3 + H_2 G_2 H_4 G_4)$$

(2) 前向通路及增益。前向通路只有一条, 其增益为  $g_1 = H_1 H_2 H_3 H_4$ , 相应的余子式为  $\Delta_1 = 1$ 。

(3) 按梅森公式即得系统函数

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{\Delta}$$

【例 7-2】 求图 7-5 信号流图的系统函数。

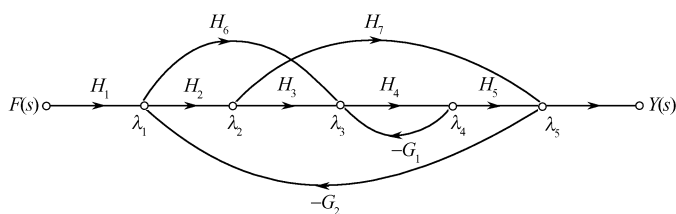


图 7-5 例 7-2 的信号流图

解: 为了利用梅森公式求系统函数, 先求出有关参数。

(1) 求  $\Delta$ 。求所有环路增益。从信流图中可以看出, 共有以下 4 条环路

$$L_1 = (\lambda_3 \rightarrow \lambda_4 \rightarrow \lambda_3) = -H_4 G_1$$

$$L_2 = (\lambda_2 \rightarrow \lambda_5 \rightarrow \lambda_1 \rightarrow \lambda_2) = -H_7 G_2 H_2$$

$$L_3 = (\lambda_1 \rightarrow \lambda_3 \rightarrow \lambda_4 \rightarrow \lambda_5 \rightarrow \lambda_1) = -H_6 H_4 H_5 G_2$$

$$L_4 = (\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 \rightarrow \lambda_3 \rightarrow \lambda_4 \rightarrow \lambda_5 \rightarrow \lambda_1) = -H_2 H_3 H_4 H_5 G_2$$

求两两不接触环路增益的乘积, 只有  $L_1$  和  $L_2$  是不接触的环路, 即  $L_1 L_2 = H_2 H_4 H_7 G_1 G_2$ , 由此得

$$\Delta = 1 + (H_4 G_1 + H_2 H_7 G_2 + H_4 H_5 H_6 G_2 + H_2 H_3 H_4 H_5 G_2) + H_2 H_4 H_7 G_1 G_2$$

(2) 前向通路共 3 条:

第一条:  $\lambda \rightarrow \lambda_1 \rightarrow \lambda_2 \rightarrow \lambda_3 \rightarrow \lambda_4 \rightarrow \lambda_5$

$$g_1 = H_1 H_2 H_3 H_4 H_5$$

没有与第一条通路不接触的环路, 所以  $\Delta_1 = 1$ 。

第二条:  $\lambda \rightarrow \lambda_1 \rightarrow \lambda_3 \rightarrow \lambda_4 \rightarrow \lambda_5$

$$g_2 = H_1 H_6 H_4 H_5$$

没有与第二条通路不接触的环路, 所以  $\Delta_2 = 1$ 。

第三条:  $\lambda \rightarrow \lambda_1 \rightarrow \lambda_2 \rightarrow \lambda_5$

$$g_3 = H_1 H_2 H_7$$

与第三条通路不接触的环路为  $L_1$ , 所以  $\Delta_3 = 1 + H_4 G_1$ 。

最后得到系统函数为

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{\Delta} \sum_3 g_k \Delta_k \\ &= \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 + H_1 H_6 H_4 H_5 + H_1 H_2 H_7 (1 + H_4 G_1)}{1 + H_4 G_1 + H_2 H_7 G_2 + H_4 H_5 H_6 G_2 + H_2 H_3 H_4 H_5 G_2 + H_2 H_4 H_7 G_1 G_2} \end{aligned}$$

## 7.1.2 系统的信号流图模拟

为了研究一个系统的特性,我们需要采用模拟手段,改变各种参数以观察系统特性的变化情况。这里的模拟是在数学意义上的,并非实验室的仿真系统,只是用一些积分器、加法器、标量乘法器、延迟单元等模拟器件组成模拟系统,与相应的物理系统没有什么直接关系,只是具有相同的系统数学模型和系统函数。在此,以梅森公式为基础,介绍系统的三种模拟形式。

### 1. 直接形式(卡尔曼形式)

若系统函数 
$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$$

则可以表示为 
$$H(s) = \frac{s^{-1} + b_0s^{-2}}{1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}}$$

根据梅森规则,从  $H(s)$  的分母可得,系统有两个环路,增益分别是  $-a_1s^{-1}$  和  $-a_0s^{-2}$ ,且是接触环路,也即系统的特征行列式  $\Delta = 1 + a_1s^{-1} + a_0s^{-2}$ ;若从源点  $F(s)$  到阱点  $Y(s)$  有两条均与环路接触的前向通路,增益为  $g_1 = s^{-1}$ ,  $g_2 = b_0s^{-2}$ ,那么该系统的系统函数正是  $H(s)$ 。按照这样的思路就可以画出该系统的直接形式模拟图,如图 7-6(a) 或图 7-6(b) 所示。

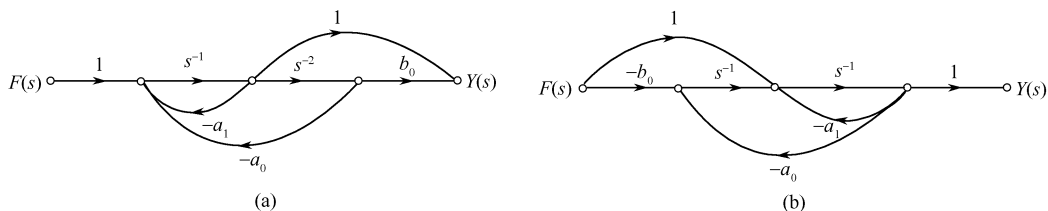


图 7-6  $H(s) = \frac{s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}$  系统的直接形式模拟图

### 2. 串联形式(级联形式)

设 
$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s + 2}{s + 3} \cdot \frac{1}{s + 1} = \frac{1 + 2s^{-1}}{1 + 3s^{-1}} \cdot \frac{s^{-1}}{1 + s^{-1}}$$

分别画出  $\frac{1 + 2s^{-1}}{1 + 3s^{-1}}$  和  $\frac{s^{-1}}{1 + s^{-1}}$  的模拟图,再将二者串联起来,就得到系统的串联形式模拟图,如图 7-7(a), (b) 和 (c) 所示。

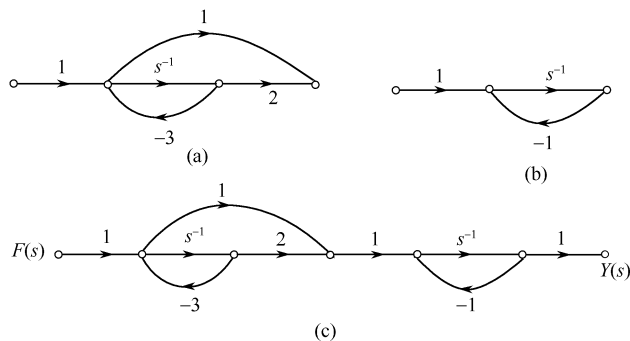


图 7-7  $H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 3}$  的串联形式模拟图



可见,串联形式是将  $H(s)$  表示为  $H(s) = H_1(s)H_2(s)\cdots H_n(s)$ , 分别画出各子系统的直接模拟图,再串联起来就是串联形式模拟图。

### 3. 并联形式

设 
$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3}$$

因为 
$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{2}s^{-1} + \frac{1}{2}s^{-1}$$

分别画两个子系统  $\frac{1}{2}s^{-1}$  和  $\frac{1}{2}s^{-1}$  的信号流图,然后再

并联起来就得到  $H(s)$  的并联形式模拟图,如图 7-8 所示。

可见,将  $H(s)$  用部分分式展开为  $H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_n(s)$ , 分别画各子系统的信号流图。然后再并联起来就得到  $H(s)$  的并联形式模拟图。

**【例 7-3】** 已知某系统的  $H(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2}$ , 试画出系统的信号流图。

**解:** (1) 直接形式。

$$H(s) = \frac{2s+3}{s^4+7s^3+16s^2+12s} = \frac{2s^{-3}+3s^{-4}}{1+7s^{-1}+16s^{-2}+12s^{-3}}$$

根据梅森公式,可令

$$\Delta = 1 - (-7s^{-1} - 16s^{-2} - 12s^{-3})$$

$$g_1 = 2s^{-3}, \quad \Delta_1 = 1$$

$$g_2 = 3s^{-4}, \quad \Delta_2 = 1$$

由此得信号流图如图 7-9 所示。

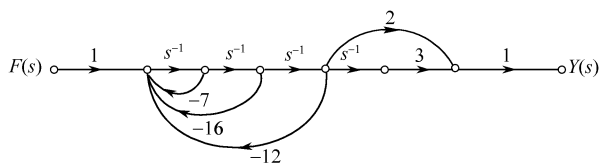


图 7-9 例 7-3 的直接形式信号流图

(2) 串联形式。将  $H(s)$  改写为如下形式

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2s+3}{s(s+3)(s+2)^2} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{2s+3}{s+2} \cdot \frac{1}{s+3} \\ &= H_1(s)H_2(s)H_3(s)H_4(s) \end{aligned}$$

故串联形式信号流图如图 7-10 所示。

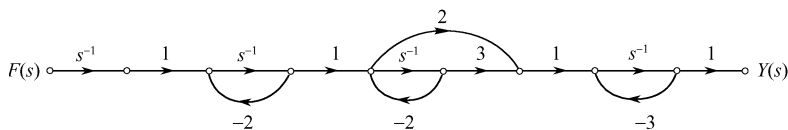


图 7-10 例 7-3 的串联形式信号流图

(3) 并联形式。将  $H(s)$  展开为部分分式,得

$$H(s) = \frac{1/4}{s} + \frac{1}{s+3} + \frac{1/2}{(s+2)^2} + \frac{-5/4}{s+2} = H_1(s) + H_2(s) + H_3(s)$$

故并联形式信号流图如图 7-11 所示。

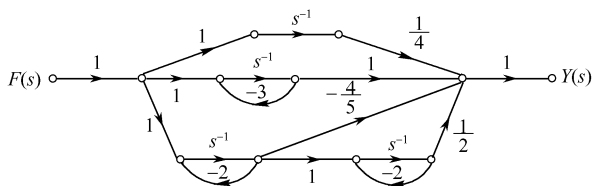


图 7-11 例 7-3 的并联形式信号流图

这里需要特别指出的是:在以上信号流图及系统模拟的讨论中,都是用复变量  $s$  讨论的。实际上,对于  $z$  域,以上讨论均是成立的。也就是说,若将复变量  $s$  换成  $z$ ,那么逐字逐句地重复以上讨论,就是对离散系统  $H(z)$  的模拟,这里就不再重复了。

## 7.2 系统的状态变量分析

前几章系统地介绍了系统的时域分析法和变换域分析法,关心的是输入与输出的关系,是系统的整体性和外部特性,而系统用数学模型来描述,这种分析方法叫输入-输出法。但在一些情况下,我们研究的不仅是系统输出的变化,还要研究其内部一些变量的情况,例如研究系统内部某一特定元件所产生的瞬态响应,或想要对系统内部某些变量进行控制。除此之外,系统的输入和输出有时不仅限于单输入和单输出,会有多输入多输出的情况,这时用输入-输出法就难以解决问题。在这些情况下,我们就需要另外一种系统分析方法,即状态变量分析法。

状态变量分析法比输入-输出法具有明显优越性,它不仅可以描述系统的外部特性,也可以描述系统的内部特性;不仅适用于线性系统、时不变系统,也适用于非线性系统、时变系统;对多输入多输出系统的分析有效;其数学模型特别适宜于计算机进行数值计算。状态变量分析法内容丰富,涉及问题广泛,限于篇幅,本章只对这种分析方法的基本概念进行介绍,深入的研究有待后续其他课程中进行。

### 7.2.1 状态和状态变量

系统的状态是一个普通的概念,可以是一切自然系统和物理系统中的状态概念。在分析电路中,我们已经建立了状态这个概念。如一个串联 RC 电路,如图 7-12 所示。若以电容电压为变量,可以得到该系统的微分方程为

$$u_C'(t) + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{1}{RC}f(t)$$

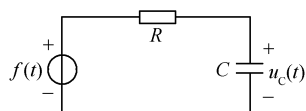


图 7-12 串联 RC 电路

在已知  $f(t)$  时,要求出响应  $u_C(t)$ ,还要有另一个条件就是电路的初始状态  $u_C(0^-)$ 。因为电路中存在记忆元件,在  $t \geq t_0$  时的输出不仅由输入决定,而且与电路的历史情况有

关。我们把表征系统状态的变量称为状态变量,电容电压和电感电流都可作为状态变量,因为二者都是记忆元件,即系统在某一瞬时  $t_0$  的状态,包括了关于该系统过去历史的所有内容。

所以,系统的状态是表示系统的一组最少数据。在  $t \geq t_0$  时,当输入和  $t = t_0$  这组数据已知时,就完全确定了  $t \geq t_0$  时系统的状态。而将能够表示系统状态的那些变量称为状态变量,如电容的电压和电感的电流。对一个复杂系统,如果在  $t_0$  瞬间有几个初始状态,那么我们就说它有几个状态变量。

## 7.2.2 连续系统的状态方程和输出方程

设有一个多输入多输出的 LTI 连续系统如图 7-13 所示。若系统的状态变量为  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ , 则系统在  $t_0$  瞬间的输出可以通过该时刻的输入和状态变量来决定。要求出状态变量变化的情况和响应的情况,需要建立两种方程组。第一种方程组说明状态变量和输入之间的关系,第二种方程组说明输出与状态变量以及输入的关系。前者称为状态

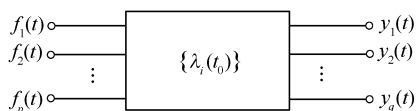


图 7-13 一个多输入多输出连续系统

(变量)方程,后者称为输出方程。该连续系统的状态方程的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\lambda_1(t)}{dt} &= a_{11}\lambda_1(t) + a_{12}\lambda_2(t) + \dots + a_{1n}\lambda_n(t) + b_{11}f_1(t) + b_{12}f_2(t) + \dots + b_{1p}f_p(t) \\ \frac{d\lambda_2(t)}{dt} &= a_{21}\lambda_1(t) + a_{22}\lambda_2(t) + \dots + a_{2n}\lambda_n(t) + b_{21}f_1(t) + b_{22}f_2(t) + \dots + b_{2p}f_p(t) \\ &\vdots \\ \frac{d\lambda_n(t)}{dt} &= a_{n1}\lambda_1(t) + a_{n2}\lambda_2(t) + \dots + a_{nn}\lambda_n(t) + b_{n1}f_1(t) + b_{n2}f_2(t) + \dots + b_{np}f_p(t) \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

式中  $a, b$  是由系统参数组成的系数,对于 LTI 系统它们是常数;否则,它们是时间的函数。

将式(7-3)写成矩阵形式为(记  $\dot{\lambda}_i(t) = \frac{d\lambda_i(t)}{dt}$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_p(t) \end{bmatrix} \quad (7-4)$$

$$\text{式(7-4)可简记为} \quad \dot{\lambda}(t) = A\lambda(t) + Bf(t) \quad (7-5)$$

$$\lambda(t) \triangleq [\lambda_1(t) \quad \lambda_2(t) \quad \dots \quad \lambda_n(t)]^T$$

式中

$$\dot{\lambda}(t) \triangleq [\dot{\lambda}_1(t) \quad \dot{\lambda}_2(t) \quad \dots \quad \dot{\lambda}_n(t)]^T$$

$$f(t) \triangleq [f_1(t) \quad f_2(t) \quad \dots \quad f_p(t)]^T$$

矩阵  $A_{n \times n}$  和  $B_{n \times p}$  是系数矩阵,对 LTI 系统,它们都是常数矩阵,其中  $A$  称为系统矩阵,  $B$  称为控制矩阵。

同样,该系统的输出方程可写为

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_p(t) \end{bmatrix} \quad (7-6)$$

$$\text{式(7-6)可简写为} \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t) \quad (7-7)$$

式中  $\mathbf{y}(t) \triangleq [y_1(t) \ y_2(t) \ \cdots \ y_q(t)]^T$

矩阵  $\mathbf{C}_{q \times n}$  和  $\mathbf{D}_{q \times p}$  是系数矩阵, 其中  $\mathbf{C}$  称为输出矩阵。

可见, 连续系统的状态方程是一个以矢量为变量的一阶微分方程。我们知道, 若系统具有  $n$  个状态变量, 该系统就是  $n$  阶系统, 而  $n$  阶系统的数学模型是  $n$  阶微分方程式。现在以状态矢量来描述, 就是把求解  $n$  阶微分方程的问题转化为求联立的几个一阶微分方程的问题。而连续系统的输出方程通过状态变量矢量和输入矢量来表示, 只要知道状态变量的变化规律, 系统的输出就不难确定了。

### 7.2.3 连续系统状态方程和输出方程的建立

对于一个已知的系统, 如何才能建立式(7-5)和式(7-7)形式的状态方程和输出方程呢? 下面就介绍几种方法。

#### 1. 由电路图直接建立

为建立状态方程和输出方程, 首先必须选定状态变量。给定系统电路图时, 通常选电容两端电压和电感电流为状态变量。必须指出, 这里所选定的每个状态变量都应当是独立的变量, 即状态变量之间是线性无关的。具体来讲, 就是选择独立的电容电压和独立的电感电流做为状态变量。如图 7-14 所示电路中, 图(a)中只能选一个电容电压为状态变量, 即只有一个独立的电容电压; 图(b)中只能选两个电容电压为状态变量, 即只有两个独立的电容电压。同理, 如图 7-15 所示电路中, 图(a)中只能选一个电感电流为状态变量, 图(b)中只能选两个电感电流为状态变量。

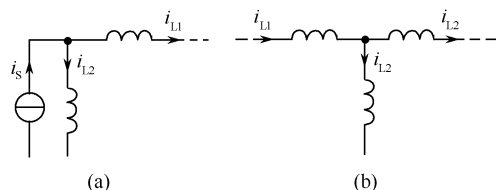
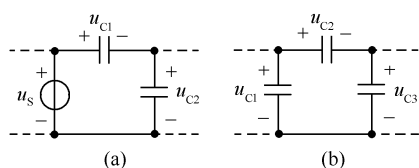


图 7-14 电容与电压源互连以及电容互连的回路 图 7-15 电感与电流源互连以及电感互连的节点

在选定关键的状态变量后, 对电容列写 KCL 方程, 对电感列写 KVL 方程, 经过化简消除状态变量之外的变量, 整理成一般形式的状态方程和输出方程。

**【例 7-4】** 试列出图 7-16 所示系统的状态方程。

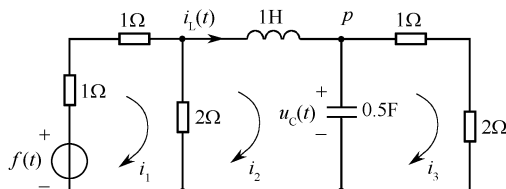


图 7-16 例 7-4 的电路

**解:**按照列写状态方程的步骤有:

(1) 在网络中选取独立电容电压  $u_c(t)$  和电感电流  $i_L(t)$  为状态变量,如图 7-16 中所示(这里,状态变量就用  $u_c(t)$  和  $i_L(t)$  表示,不需要变成  $\lambda_1(t)$  和  $\lambda_2(t)$ )。

(2) 列出 KCL 和 KVL 方程。设 3 个网孔电流分别为  $i_1, i_2, i_3$ ,如图 7-16 所示。列出 KVL(沿网孔 2)和 KCL(节点  $p$ )为

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = -u_c(t) - 2(i_2 - i_1) = -u_c(t) - 2i_L(t) + 2i_1 \quad ①$$

$$C \frac{du_c(t)}{dt} = i_L(t) - i_3 \quad ②$$

将  $L, C$  的值代入式①和式②,则有

$$\dot{i}_L(t) = -i_L(t) - u_c(t) + 2i_1 \quad ③$$

$$\frac{1}{2} \dot{u}_c(t) = i_L(t) - i_3 \quad ④$$

式中

$$\dot{i}_L(t) = \frac{di_L(t)}{dt}, \quad \dot{u}_c(t) = \frac{du_c(t)}{dt}$$

(3) 消去非状态变量  $i_1$  和  $i_3$ ,并整理。因为

$$f(t) = 4i_1 - 2i_L(t), \quad u_c(t) = 3i_3$$

得出

$$i_1 = \frac{1}{2}i_L(t) + \frac{1}{4}f(t), \quad i_3 = \frac{1}{3}u_c(t)$$

将  $i_1, i_3$  代入式③和式④,并整理得状态方程为

$$\begin{cases} \dot{i}_L(t) = -i_L(t) - u_c(t) + \frac{1}{2}f(t) \\ \dot{u}_c(t) = 2i_L(t) - \frac{2}{3}u_c(t) \end{cases}$$

或记为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{u}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

**【例 7-5】** 写出图 7-17 所示网络的状态方程。

**解:**由网络可以分析,  $u_s(t)$  与  $C_1, C_3$  组成回路,故电容电压  $u_1(t), u_3(t)$  中只能选取一个作为独立状态变量;图中也有只连接电流源  $i_s$  和  $L_2, L_4$  的节点,故电感电流  $i_2(t), i_4(t)$  中只能选一个作为独立状态变量,所以图 7-17 中只有两个独立的状态变量。

选  $u_1(t)$  和  $i_2(t)$  为状态变量,并令

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1(t) &= u_1(t) \\ \lambda_2(t) &= i_2(t) \end{aligned} \right\} \quad ①$$

为简便起见,经常略写变量中的  $t$ 。则  $C_3$  上的电压和  $L_4$  中的电流可写为

$$\left. \begin{aligned} u_3(t) &= u_3 = u_s - \lambda_1 \\ i_4(t) &= i_4 = i_s + \lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad ②$$

对于节点  $a$  和由  $C_1, L_2, L_4, R_4$  组成的回路,可列出

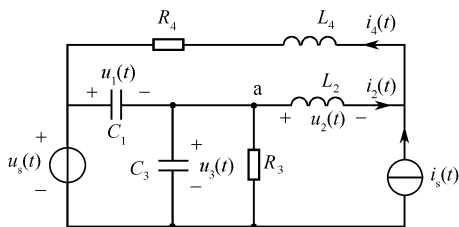


图 7-17 例 7-5 的网络

方程为

$$\left. \begin{aligned} C_1 \frac{d\lambda_1}{dt} &= C_3 \frac{du_3}{dt} + \frac{u_3}{R_3} + \lambda_2 \\ \lambda_1 + L_2 \frac{d\lambda_2}{dt} + L_4 \frac{di_4}{dt} + R_4 i_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

将式②代入式③得

$$\left. \begin{aligned} C_1 \frac{d\lambda_1}{dt} &= C_3 \frac{du_s}{dt} - C_3 \frac{d\lambda_1}{dt} + \frac{u_s}{R_3} - \frac{\lambda_1}{R_3} + \lambda_2 \\ \lambda_1 + L_2 \frac{d\lambda_2}{dt} + L_4 \frac{di_s}{dt} + L_4 \frac{d\lambda_2}{dt} + R_4 i_s + R_4 \lambda_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将式④加以整理,就可写成标准的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_3(C_1+C_3)} & \frac{1}{(C_1+C_3)} \\ \frac{-1}{L_2+L_4} & \frac{-R_4}{L_2+L_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_3(C_1+C_3)} & 0 \\ 0 & \frac{-R_4}{L_2+L_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_3}{C_1+C_3} & 0 \\ 0 & \frac{-L_4}{L_2+L_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_s}{dt} \\ \frac{di_s}{dt} \end{bmatrix}$$

由于  $u_s$  和  $i_s$  是已知的,所以  $\frac{du_s}{dt}$  和  $\frac{di_s}{dt}$  也是已知函数。

## 2. 由系统模拟框图或信号流图建立

要建立状态方程和输出方程,首先要选定状态变量。给定系统的模拟框图或信号流图时,通常选取积分器的输出为状态变量,则系统中有几个积分器,就有几个状态变量。然后根据信号之间的关系列出状态方程和输出方程。

【例 7-6】 列写图 7-18 所示系统的状态方程和输出方程。

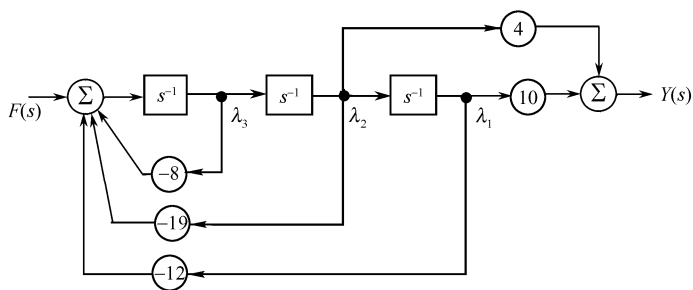


图 7-18 例 7-6 的图

**解:**选取各积分器的输出为状态变量  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ ,  $\lambda_3(t)$ , 如图 7-18 中所示(以下省略变量中的  $t$ ), 则有

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 &= -12\lambda_1 - 19\lambda_2 - 8\lambda_3 + f(t) \\ y(t) &= 10\lambda_1 + 4\lambda_2 \end{aligned}$$

写成标准形式的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y(t) = [10 \quad 4 \quad 0] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

【例 7-7】 已知某系统的系统函数  $H(s) = \frac{s+4}{s^3+6s^2+11s+6}$ , 编写出该系统的状态方程和输出方程。

**解:** 首先由系统函数  $H(s)$  画出它的信号流图。我们知道, 信号流图一般有三种形式: 直接形式、串联形式和并联形式。采取不同的形式, 写出来的状态方程形式也不同。下面分别用这三种形式的信号流图编写它们相应的状态方程。

(1) 直接形式。由  $H(s)$  画出直接形式的信号流图如图 7-19 所示。

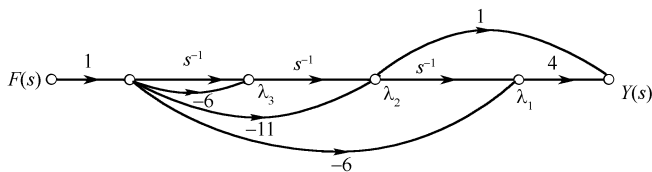


图 7-19 例 7-7 中  $H(s)$  的直接形式信号流图

选取积分器输出作为状态变量  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ , 如图 7-19 所示。以下仍省略变量中的  $t$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 &= -6\lambda_1 - 11\lambda_2 - 6\lambda_3 + f(t) \\ y(t) &= 4\lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

写成状态方程、输出方程的标准形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y(t) = [4 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

(2) 串联形式。系统函数  $H(s)$  可以变形为

$$H(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+4}{s+2} \cdot \frac{1}{s+3}$$

画出  $H(s)$  的串联形式的信号流图如图 7-20 所示。

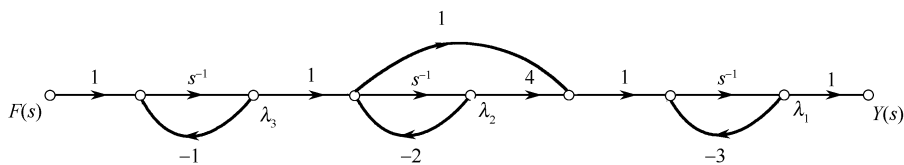


图 7-20 例 7-7 中  $H(s)$  的串联形式信号流图

选取积分器输出为状态变量  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 则有

$$\dot{\lambda}_1 = -3\lambda_1 + 4\lambda_2 + (\lambda_3 - 2\lambda_2) = -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$$

$$\dot{\lambda}_2 = -2\lambda_2 + \lambda_3$$

$$\dot{\lambda}_3 = -\lambda_3 + f(t)$$

$$y(t) = \lambda_1$$

写成状态方程和输出方程的标准形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

(3) 并联方式。将  $H(s)$  改写为

$$H(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{3/2}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{1/2}{s+3}$$

画出  $H(s)$  的并联形式信号流图如图 7-21 所示。

选取积分器的输出端为状态变量  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , 如图 7-21 中所示。则有

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 + f(t)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -2\lambda_2 + f(t)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -3\lambda_3 + f(t)$$

$$y(t) = \frac{3}{2}\lambda_1 - 2\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3$$

写成状态方程和输出方程的标准形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

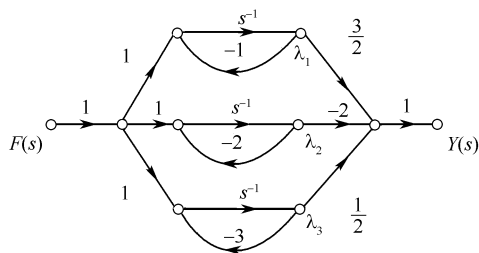


图 7-21 例 7-7 中  $H(s)$  的并联形式信号流图



$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

由上例可知,系统的信号流图不唯一,系统的状态方程也不唯一。

#### 7.2.4 连续系统状态方程和输出方程的求解

状态方程和输出方程的求解,可以在时域进行,也可以在复频域进行。由于复频域的解法比较简便,所以下面只讨论复频域解法,关于时域解法读者可参阅相关文献。

##### 1. 连续系统状态方程的复频域解法

若给定  $n$  阶系统的状态方程为

$$\dot{\lambda}(t) = A\lambda(t) + Bf(t)$$

式中,  $\dot{\lambda}(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $f(t)$  都是矢量。并设  $\lambda(t) \leftrightarrow \Lambda(s)$ ,  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ , 起始条件  $\lambda(0^-) = [\lambda_1(0^-) \lambda_2(0^-) \cdots \lambda_n(0^-)]^T$ , 对状态方程两边取拉氏变换有

$$s\Lambda(s) - \lambda(0^-) = A\Lambda(s) + BF(s) \quad (7-8)$$

整理得

$$\Lambda(s) = (sI - A)^{-1}\lambda(0^-) + (sI - A)^{-1}BF(s) \quad (7-9)$$

式中,  $I$  为单位矩阵。

若令  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ , 称为系统的特征矩阵, 则式(7-9)为

$$\Lambda(s) = \Phi(s)\lambda(0^-) + \Phi(s)BF(s) \quad (7-10)$$

将式(7-10)取拉氏逆变换就得到状态变量的时域表达式为

$$\lambda(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)\lambda(0^-)] + \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)BF(s)] \quad (7-11)$$

【例 7-8】 设某系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & \frac{2}{3} \\ -36 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} U(t)$$

初始条件为  $\lambda_1(0^-) = 2, \lambda_2(0^-) = 1$ , 试求解该系统的状态方程。

解: 由于  $sI - A = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & 2/3 \\ -36 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+12 & -2/3 \\ 36 & s+1 \end{bmatrix}$

得系统的特征矩阵为

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+4)(s+9)} & \frac{2/3}{(s+4)(s+9)} \\ \frac{-36}{(s+4)(s+9)} & \frac{s+12}{(s+4)(s+9)} \end{bmatrix}$$

初始条件为

$$\lambda(0^-) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

又  $F(s) = 1/s$ , 所以有

$$BF(s) = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 1/(3s) \\ 1/s \end{bmatrix}$$

$$\lambda(0^-) + \mathbf{B}\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{6s+1}{3s} \\ \frac{s+1}{s} \end{bmatrix}$$

将上面计算结果代入式(7-9)中得

$$\mathbf{A}(s) = \Phi(s) [\lambda(0^-) + \mathbf{B}\mathbf{F}(s)] = \begin{bmatrix} \frac{2s^2+3s+1}{s(s+4)(s+9)} \\ \frac{s-59}{(s+4)(s+9)} \end{bmatrix}$$

经拉氏逆变换,可得状态变量的时域表达式为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{36} - \frac{21}{20}e^{-4t} + \frac{136}{45}e^{-9t} \right) U(t) \\ \left( -\frac{63}{5}e^{-4t} + \frac{68}{5}e^{-9t} \right) U(t) \end{bmatrix}$$

## 2. 连续系统输出方程的复频域解法

与状态方程复频域解法相类似,将式(7-7)的  $n$  阶系统的输出方程两边取拉氏变换得

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{A}(s) + \mathbf{D}\mathbf{F}(s) \quad (7-12)$$

式中,  $\mathbf{y}(t) \longleftrightarrow \mathbf{Y}(s)$ ,  $\lambda(t) \longleftrightarrow \mathbf{A}(s)$ ,  $\mathbf{f}(t) \longleftrightarrow \mathbf{F}(s)$ 。将式(7-10)代入上式得

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \Phi(s) \lambda(0^-) + [\mathbf{C} \Phi(s) \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{F}(s) \quad (7-13)$$

对上式取拉氏逆变换可得响应的时域表达式为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s) \lambda(0^-)] + \{\mathbf{C} \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s) \mathbf{B}] + \mathbf{D} \delta(t)\} * \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(s)] \quad (7-14)$$

式中,  $\delta(t)$  为单位冲激函数矩阵,其定义为

$$\delta(t) = \begin{bmatrix} \delta(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta(t) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \delta(t) \end{bmatrix} \quad (7-15)$$

由式(7-14)可见,系统的响应由两部分组成,第一部分是零输入响应,第二部分是零状态响应。

**【例 7-9】** 某系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$$

起始条件为  $\lambda_1(0^-) = 1$ ,  $\lambda_2(0^-) = 2$ ,求该系统的响应  $\mathbf{y}(t)$ 。

解:因为

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

则

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

将  $\Phi(s)$  和已知条件代入式(7-13)得

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

对  $\mathbf{Y}(s)$  进行拉氏逆变换得

$$y(t) = \left[ \frac{7}{4} e^{-3t} + \frac{1}{12} (e^{-3t} - 1) \right] U(t) = \left( \frac{11}{6} e^{-3t} - \frac{1}{12} \right) U(t)$$

## 7.2.5 离散系统的状态方程和输出方程的建立

由连续系统的状态方程和输出方程的理论,可以推广到离散系统。对于图 7-22 所示的离散系统,其状态方程和输出方程的一般形式为

$$\boldsymbol{\lambda}(n+1) = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(n) + \mathbf{B}\mathbf{f}(n) \quad (7-16)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(n) + \mathbf{D}\mathbf{f}(n) \quad (7-17)$$

式中  $\boldsymbol{\lambda}(n) \triangleq [\lambda_1(n) \quad \lambda_2(n) \quad \cdots \quad \lambda_N(n)]^T$

$$\mathbf{f}(n) \triangleq [f_1(n) \quad f_2(n) \quad \cdots \quad f_p(n)]^T$$

$$\mathbf{y}(n) \triangleq [y_1(n) \quad y_2(n) \quad \cdots \quad y_q(n)]^T$$

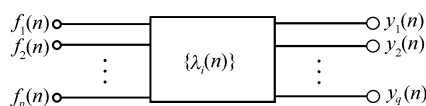


图 7-22 一个多输入—多输出离散系统

矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  为系数矩阵,形式同连续系统动态方程中的系数矩阵。

与连续系统相比,离散系统的状态方程是用前一时刻的状态和输入来表示某一已知时刻的状态的。

离散系统的实际结构只是用模拟框图或信号流程图给出,建立其状态方程和输出方程时通常取延迟单元的输出为状态变量。其余都与连续系统完全一样。

**【例 7-10】** 描述离散系统的差分方程为

$$y(n) + a_2 y(n-1) + a_1 y(n-2) + a_0 y(n-3) = f(n)$$

试列出其状态方程和输出方程。

**解:** 根据差分方程理论,如果  $y(-3), y(-2), y(-1)$  和  $n \geq 0$  时的  $f(n)$  为已知,就能完全确定系统的未来状态。因此选取  $y(n-3), y(n-2), y(n-1)$  作为状态变量。令

$$\lambda_1(n) = y(n-3), \quad \lambda_2(n) = y(n-2), \quad \lambda_3(n) = y(n-1)$$

则有

$$\lambda_1(n+1) = y(n-2) = \lambda_2(n)$$

$$\lambda_2(n+1) = y(n-1) = \lambda_3(n)$$

$$\begin{aligned} \lambda_3(n+1) &= y(n) = -a_0 y(n-3) - a_1 y(n-2) - a_2 y(n-1) + f(n) \\ &= -a_0 \lambda_1(n) - a_1 \lambda_2(n) - a_2 \lambda_3(n) + f(n) \end{aligned}$$

所以该系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \\ \lambda_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \\ \lambda_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(n)$$

其输出方程为

$$y(n) = -a_0 \lambda_1(n) - a_1 \lambda_2(n) - a_2 \lambda_3(n) + f(n)$$

写成矩阵形式为

$$\mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \\ \lambda_3(n) \end{bmatrix} + f(n)$$

【例 7-11】 给定系统的模拟框图或信号流程图如图 7-23 所示,列出系统的状态方程和输出方程。

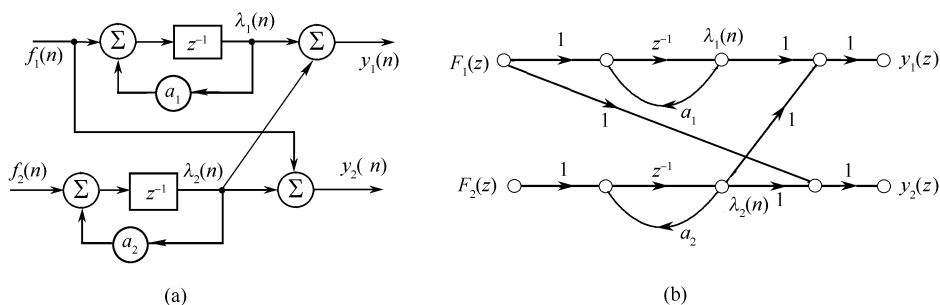


图 7-23 例 7-11 的系统框图和信号流程图

解:选取两个延迟单元的输出作为状态变量  $\lambda_1(n)$  和  $\lambda_2(n)$ ,如图 7-23 所示,则有

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = a_1 \lambda_1(n) + f_1(n) \\ \lambda_2(n+1) = a_2 \lambda_2(n) + f_2(n) \\ y_1(n) = \lambda_1(n) + \lambda_2(n) \\ y_2(n) = \lambda_2(n) + f_1(n) \end{cases}$$

表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}$$

## 7.2.6 离散系统的状态方程和输出方程的求解

和连续系统的复频域解法类似,离散系统的  $z$  域解法也较时域解法简便,所以在此也只介绍  $z$  域解法,时域解法请参考相关文献。

由状态方程和输出方程:

$$\boldsymbol{\lambda}(n+1) = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}(n) + \mathbf{B}f(n)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}(n) + \mathbf{D}f(n)$$

设  $\boldsymbol{\lambda}(n) \longleftrightarrow \mathbf{A}(z)$ ,  $f(n) \longleftrightarrow F(z)$ ,  $\boldsymbol{\lambda}(0) = [\lambda_1(0) \ \lambda_2(0) \ \cdots \ \lambda_n(0)]^T$

两边取  $z$  变换

$$\begin{cases} z\mathbf{A}(z) - z\boldsymbol{\lambda}(0) = \mathbf{A}\mathbf{A}(z) + \mathbf{B}F(z) \\ \mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{A}(z) + \mathbf{D}F(z) \end{cases} \quad (7-18)$$

整理得到

$$\begin{cases} \mathbf{A}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\boldsymbol{\lambda}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}F(z) \\ \mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\boldsymbol{\lambda}(0) + \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}F(z) + \mathbf{D}F(z) \end{cases} \quad (7-19)$$

取其逆变换即得时域表达式为

$$\left. \begin{aligned} \lambda(n) &= \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z]\lambda(0) + \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}] * \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{F}(z)] \\ y(n) &= \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z]\lambda(0) + \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{C}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}] * \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{F}(z)] \end{aligned} \right\} \quad (7-20)$$

【例 7-12】 某离散系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = -\lambda_1(n) + 3\lambda_2(n) + 11f_1(n) \\ \lambda_2(n+1) = -2\lambda_1(n) + 4\lambda_2(n) + 6f_2(n) \\ y(n) = \lambda_1(n) - \lambda_2(n) + f_2(n) \end{cases}$$

已知系统的激励  $f_1(n) = \delta(n)$ ,  $f_2(n) = U(n)$ , 系统起始是静止的。求该系统的响应。

解: 由系统方程知

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad -1], \quad \mathbf{D} = [0 \quad 1]$$

由式(7-19)知  $\mathbf{A}(z) = (z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F}(z)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(z+1)(z-4)+6} \begin{bmatrix} z-4 & 3 \\ -z & z+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{33}{z-1} - \frac{22}{z-2} + \frac{36}{z-2} - \frac{18}{(z-1)^2} - \frac{36}{z-1} \\ \frac{22}{z-1} - \frac{22}{z-2} + \frac{26}{z-2} - \frac{12}{(z-1)^2} - \frac{30}{z-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

经逆变换得  $\lambda(n) = \begin{bmatrix} 15U(n-1) + 7 \times 2^n U(n-1) - 18nU(n-1) \\ 4U(n-1) + 2 \times 2^n U(n-1) - 12nU(n-1) \end{bmatrix}$

由式(7-19)得到  $Y(z)$  并求其逆变换为

$$y(n) = \delta(n) + (12 - 6n)U(n-1)$$

## 7.3 MATLAB 应用举例

### 7.3.1 系统状态方程和输出方程的建立

根据系统的差分、微分方程或系统函数可以, 利用 MATLAB 中的 tf2ss 函数, 来建立系统的状态方程和输出方程, 从而可以得到系统的状态变量模型。其调用格式为

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \text{tf2ss}(\text{num}, \text{den})$$

其中, num 和 den 分别为系统函数  $H(s)$  (或  $H(z)$ ) 的分子和分母多项式的系数向量, 或者分别为系统微分(差分)方程右边、左边的系数向量。A, B, C, D 为系统状态方程的系数矩阵, 由上述调用得到的状态方程是以直接型的流图为基础的, 且状态变量的选取, 在流图上自左至右依次为  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$

【例 7-13】 用 MATLAB 编程:

(1) 求  $H(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 4s + 3}$  表示的系统的状态方程和输出方程。

(2) 求  $H(z) = \frac{2z+3}{z^2+4z+3}$  表示的系统的状态方程和输出方程。

解:(1) 编程如下。

```
% Program ch7_1
b = [1 2 2];
a = [1 4 3];
[A,B,C,D] = tf2ss(b,a);
```

运行结果为

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [-2 \quad -1], \quad D = 1$$

所以,系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

$$y(t) = [-2 \quad -1] \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} + f(t)$$

(2) 编程如下。

```
% Program ch7_2
b = [0 2 3];
a = [1 4 3];
[A,B,C,D] = tf2ss(b,a);
```

运行结果如下

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 3], \quad D = 0$$

所以,系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(n+1) \\ \dot{\lambda}_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(n) \\ \dot{\lambda}_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(n)$$

$$y(n) = [2 \quad 3] \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(n) \\ \dot{\lambda}_2(n) \end{bmatrix}$$

反过来,如果已知系统的状态方程描述,则可以由函数 ss2tf 求出系统函数阵  $\mathbf{H}(s)$ , 其调用形式为

```
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,k)
```

其中,A,B,C,D 是状态方程的系数矩阵,k 表示计算与第 k 个输入相关的系统函数,是  $\mathbf{H}(s)$  的 k 列。num 是第 k 个系统函数分子多项式系数,den 是系统函数阵公共的分母多项式系数。

【例 7-14】 已知连续系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(t); \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix}$$

求系统函数  $H(s)$ 。

**解:**程序如下。

```
% Program ch7_3
A = [-6 -11 -6;1 0 0;0 1 0];
B = [1;0;0];
C = [0 2 3];
D = 0;
[num,den] = ss2tf(A,B,C,D);
```

运行结果为

```
num = [0 0 2 3],den = [1 6 11 6]
```

即 
$$H(s) = \frac{2s+3}{s^3+6s^2+11s+6}$$
。

除此以外 MATLAB 还提供了若干函数,用于不同模型间的转换,这些函数有:

ss2zp 状态模型转化为零、极模型(即系统函数的分子、分母均为因式分解形式)

zp2ss 零、极模型转化为状态模型

tf2zp 有理函数形式的系统函数转化为零、极模型

zp2tf 零、极模型转化为有理函数形式

各函数的具体用法参见 MATLAB 帮助信息。

## 7.3.2 系统状态方程的求解

### 1. 连续系统状态方程的求解

在 MATLAB 中,先用函数 ss 获得状态方程的表示模型,再由函数 lsim 计算状态方程的数值解。它们的调用格式为

```
sys = ss(A,B,C,D)
[y,t,x] = lsim(sys,f,t,x0)
```

其中,A,B,C,D 为状态方程的系数矩阵,sys 是产生的模型。而 lsim 中各参数的含义如下。

sys 为由函数 ss 构造的状态模型

t 为需计算的时间样本点向量

f 为输入信号矩阵,其第  $k$  列是第  $k$  个输入信号在  $t$  上的抽样值

x0 为系统的初始状态,默认值为零

y 为输出信号矩阵,第  $k$  列为第  $k$  个输入的响应

x 为系统的状态

**【例 7-15】** 计算  $H(s) = \frac{s^2+2s+2}{s^2+4s+3}$  所表示系统的阶跃响应。

解:编程如下。结果如图 7-24 所示。

```
% Program ch7_4, continuous - time system
b = [1 2 2];
a = [1 4 3];
[A,B,C,D] = tf2ss(b,a);
t = 0:0.01:4;
f = ones(1,length(t));
sys = ss(A,B,C,D);
[y,t,x] = lsim(sys,f,t);
plot(t,y,t,x);
title('state trajectory and step response');
box off;
legend('step response','state1','state2')
```

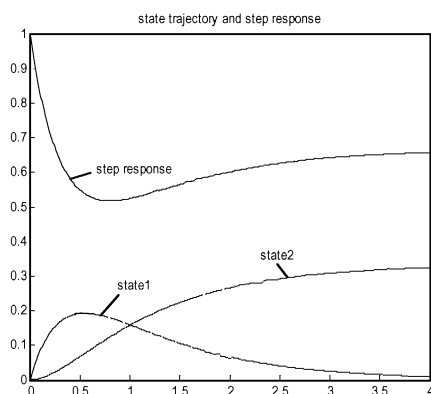


图 7-24 例 7-15 的图

## 2. 离散系统状态方程的求解

MATLAB 函数 `dlsim` 用于求解离散系统的状态方程,其调用格式为

```
y = dlsim(A,B,C,D,f,x0)
```

其中,  $A, B, C, D$  为状态方程的系数矩阵,  $f$  为输入序列,  $x_0$  为初始状态,默认值是零。  $y$  为响应序列。

【例 7-16】 离散系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.24 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(n), \quad y(n) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix}$$

求系统的阶跃响应。

解:程序如下。运行结果如图 7-25 所示。

```
% Program ch7_5, discrete -
time system
A = [1 -0.24; 1 0];
B = [1; 0];
C = [0.3 0];
D = 0;
N = 20;
f = ones(1,N);
n = 0:N-1;
[y,x] = dlsim(A,B,C,D,f);
stem(n,y,'Markersize',4,'Markerface','k');
title('Step response');
box off;
```

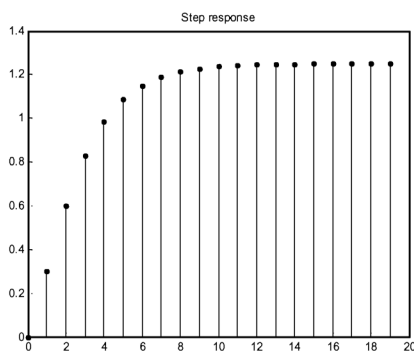


图 7-25 例 7-16 的图



## 本章关键概念小结

- 信号流图是模拟框图的简化形式。
- 节点不仅表示信号,而且具有加法器的功能。
- 连续系统的信号流图在  $s$  域中表达,离散系统的信号流图在  $z$  域中表达。
- 积分器的增益是  $s^{-1}$ ,延迟单元的增益是  $z^{-1}$ 。
- 已知系统的信号流图,用梅森公式可以方便地写出系统的系统函数。
- 已知系统,可以用信号流图进行模拟。
- 信号流图模拟系统有三种形式:直接形式、串联(级联)形式、并联形式。
- 状态变量分析法可以分析系统内部状态的变化情况和响应的情况。
- 列写状态方程的关键是选取状态变量。
- 连续 LTI 系统的状态方程的左端是状态变量的一阶微分,右端是状态变量和激励的线性组合。
- 离散 LTI 系统的状态方程的左端是状态变量的下一时刻的状态,右端是状态变量和激励的线性组合。

## 习题

7.1 已知连续时间 LTI 系统的信号流图如图 7-26 所示,求其系统函数  $H(s)$ 。

7.2 已知连续时间 LTI 系统的信号流图如图 7-27 所示,求其系统函数  $H(s)$ 。

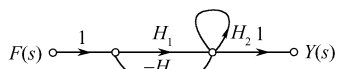


图 7-26

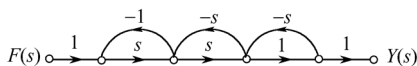


图 7-27

7.3 已知连续时间 LTI 系统的信号流图如图 7-28 所示,求其系统函数  $H(s)$ 。

7.4 已知连续时间 LTI 系统的信号流图如图 7-29 所示,求其系统函数  $H(s)$ 。

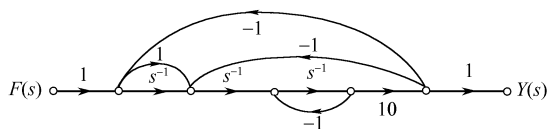


图 7-28

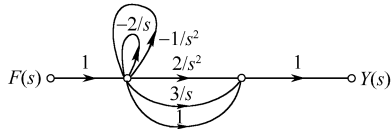


图 7-29

7.5 已知连续时间 LTI 系统的系统框图如图 7-30 所示,试画出其信号流图,求系统函数  $H(s)$ 。

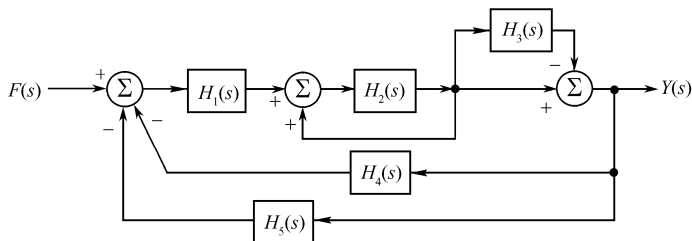


图 7-30

7.6 已知连续时间 LTI 系统的系统框图如图 7-31 所示,试画出其信号流图,求系统函数  $H(s)$ 。

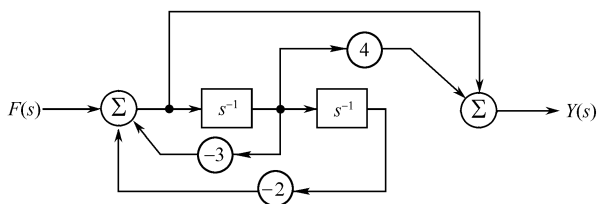


图 7-31

7.7 已知离散时间 LTI 系统的信号流图如图 7-32 所示,求其系统函数  $H(z)$ 。

7.8 已知离散时间 LTI 系统的信号流图如图 7-33 所示,求其系统函数  $H(z)$ 。

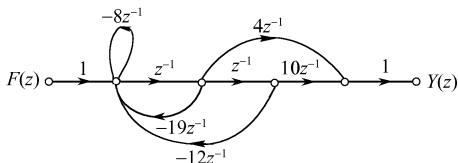


图 7-32

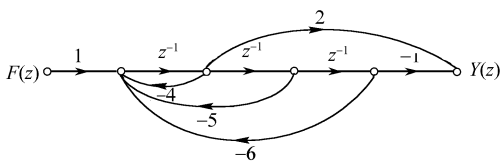


图 7-33

7.9 已知离散时间 LTI 系统的信号流图如图 7-34 所示,求其系统函数  $H(z)$ 。

7.10 已知离散时间 LTI 系统的信号流图如图 7-35 所示,求其系统函数  $H(z)$ 。

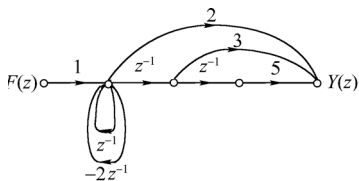


图 7-34

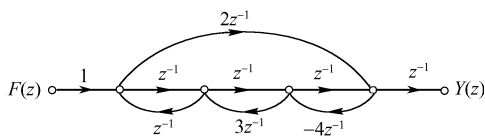


图 7-35

7.11 已知离散时间 LTI 系统的系统框图如图 7-36 所示。

(1) 分别画出其直接形式、串联形式及并联形式的信号流图; (2) 求系统函数  $H(z)$ 。

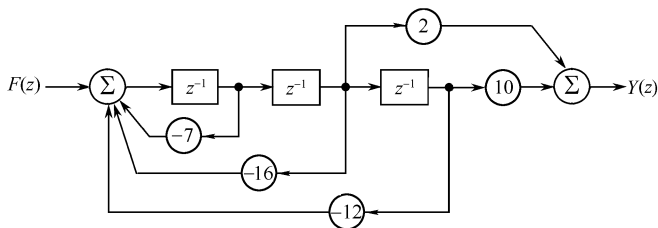


图 7-36

7.12 已知离散时间 LTI 系统的系统框图如图 7-37 所示。

(1) 分别画出其直接形式、串联形式及并联形式的信号流图; (2) 求系统函数  $H(z)$ 。

7.13 列写图 7-38 所示电路的状态方程。

7.14 列写图 7-39 所示电路的状态方程。

7.15 列写图 7-40 所示电路的状态方程和输出方程。

7.16 列写图 7-41 所示电路的状态方程和输出方程。

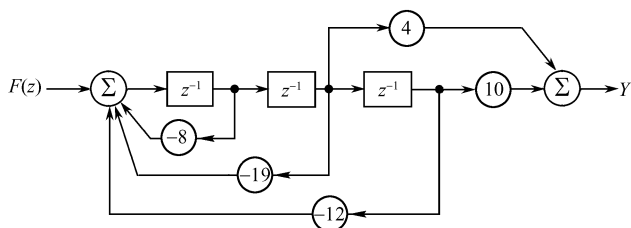


图 7-37

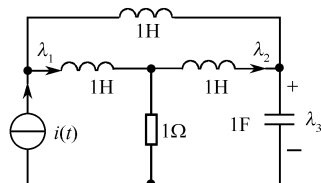


图 7-38

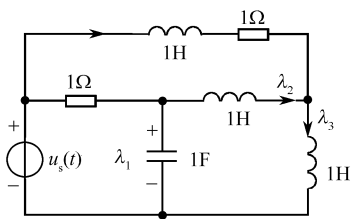


图 7-39

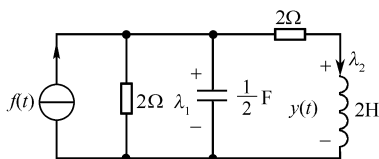


图 7-40

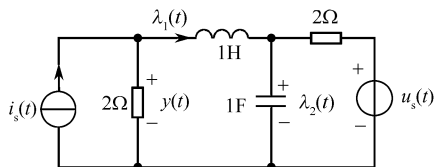


图 7-41

7.17 已知系统微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4 \frac{d}{dt}y(t) + 29y(t) = 2 \frac{d^2}{dt^2}f(t) + 9 \frac{d}{dt}f(t)$$

试求其状态方程和输出方程。

7.18 已知系统微分方程为

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 8 \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 19 \frac{d}{dt}y(t) + 12y(t) = 4 \frac{d}{dt}f(t) + 10f(t)$$

试求其状态方程和输出方程。

7.19 已知系统的系统函数为  $H(s) = \frac{6s + 15}{s^3 + 9s^2 + 18s}$ , 试求其状态方程和输出方程。

7.20 已知系统的系统函数为  $H(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 2}$ , 试求其状态方程和输出方程。

7.21 已知系统框图如图 7-42 所示, 试求其状态方程和输出方程。

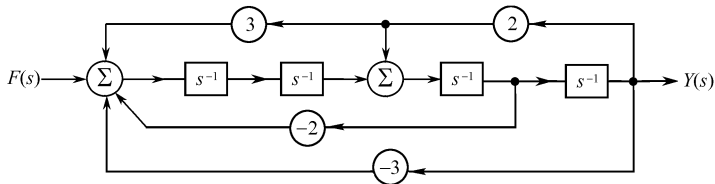


图 7-42

7.22 已知系统框图如图 7-43 所示。

(1) 求其系统函数  $H(s)$ ;

(2) 分别画出其直接形式、并联形式和串联形式的信号流图;

(3) 以积分器的输出作为状态变量,分别列写对应信号流图的状态方程和输出方程。

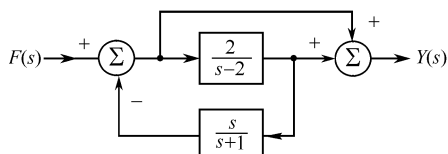


图 7-43

7.23 已知系统的信号流图如图 7-44 所示,试以积分器的输出作为状态变量,列写其状态方程和输出方程。

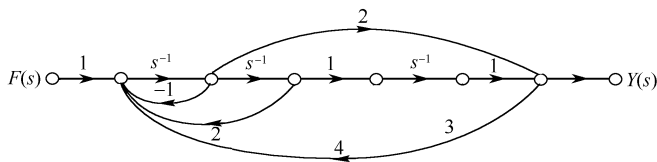


图 7-44

7.24 已知系统的信号流图如图 7-45 所示,试以积分器的输出作为状态变量,列写其状态方程和输出方程。

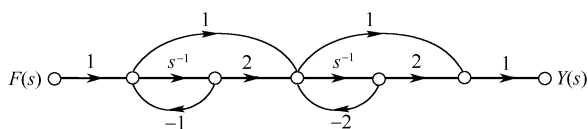


图 7-45

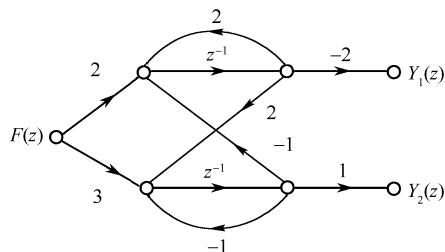


图 7-46

7.26 已知离散系统的系统函数为  $H(z) = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^3 + 3z^2 + 2z + 1}$ ,试求其状态方程和输出方程。

7.27 已知离散系统的系统函数为  $H(z) = \frac{2z + 1}{z^3 + 3z^2 + 3z + 1}$ ,试求其状态方程和输出方程。

7.28 已知离散系统的差分方程为

$$y(n) + 4y(n-2) = f(n) + 2f(n-2)$$

试求其状态方程和输出方程。

7.29 已知离散系统的差分方程为

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = f(n+1) - 2f(n)$$

试求其状态方程和输出方程。

7.30\* 已知离散系统的系统函数为  $H(z) = \frac{4z^3 + 7z^2 + 3z + 1}{2z^3 + 2z^2 + 2z}$ ,试求其状态方程和输出方程。

7.31\* 已知离散系统的信号流图如图 7-47 所示,试以延迟单元的输出作为状态变量,列写其状态方程和输出方程。

7.32\* 已知离散系统的信号流图如图 7-48 所示,试以延迟单元的输出作为状态变量,列写其状态方程和输出方程。

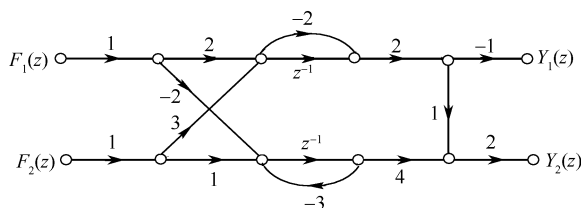


图 7-47

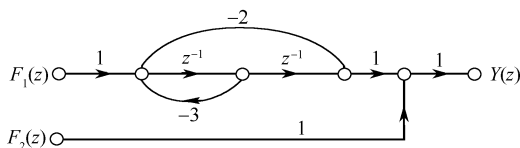


图 7-48

7.33\* 若线性时不变系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t) &= \mathbf{A}\lambda(t) + \mathbf{B}f(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\lambda(t) + \mathbf{D}f(t)\end{aligned}$$

(1) 求系统的转移函数  $H(s)$ ;

(2) 若  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = [1 \ 1 \ 0]$ ,  $\mathbf{D} = 0$ , 求  $H(s)$ ;

(3) 参数仍如上, 画系统的模拟框图;

(4) 参数仍如上, 若初始状态  $\lambda(0^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $f(t) = U(t)$ , 求系统的零输入响应和零状态响应。

7.34\* 已知系统的状态方程和初始条件为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(0^-) \\ \lambda_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

试用变换域法求解  $\lambda(t)$ 。

7.35\* 已知某离散系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = \lambda_1(n) - \lambda_2(n) \\ \lambda_2(n+1) = -\lambda_1(n) - \lambda_2(n) \\ y(n) = \lambda_1(n)\lambda_2(n) + f(n) \end{cases}$$

(1) 给定  $\lambda_1(0^-) = 2, \lambda_2(0^-) = 2$ , 求状态方程的零输入响应;

(2) 求系统的差分方程;

(3) 给定(1)的起始条件, 且  $f(n) = 2^n U(n)$ 。求全响应  $y(n)$ 。

7.36\* 已知某离散系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(n), \quad y(n) = [1 \ 1] \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix}$$

给定当  $n \geq 0$  时,  $f(n) = 0$  和  $y(n) = 8(-1)^n - 5(-2)^n$ , 求: (1) 常数  $a, b$ ; (2)  $\lambda_1(n)$  和  $\lambda_2(n)$ 。

7.37\* 已知一线性时不变系统在零输入条件下有:

$$\text{当 } \lambda(0^-) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时, } \lambda(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}; \quad \text{当 } \lambda(0^-) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 时, } \lambda(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix};$$

求:(1) 特征矩阵  $\Phi(s)$ ; (2) 确定相应的  $A$ 。

7.38\* 已知系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + f(t)$$

系统的输入  $f(t) = U(t)$ , 初始状态  $\lambda_1(0^-) = 1, \lambda_2(0^-) = 2$ 。求:

(1) 系统函数  $H(s)$  和冲激响应  $h(t)$ ; (2) 状态变量  $\lambda(t)$ ; (3) 系统输出  $y(t)$

7.39\* 已知系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} f(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$$

且在  $f(t) = U(t)$  作用下, 系统的全响应为  $y(t) = (\frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{5}{6}e^{-3t})U(t)$ , 求系统的初始状态。

7.40\* 已知离散系统的状态方程和输出方程为

$$\lambda(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \lambda(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(n), \quad y(n) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \end{bmatrix} \lambda(n) + f(n)$$

输入  $f(n) = \delta(n)$ , 初始状态  $\lambda(0^-) = 0$ , 求状态变量  $\lambda(n)$  和输出  $y(n)$ 。

## 上机练习

7.1 已知一连续系统的微分方程为  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ , 由 MATLAB 求出状态方程, 并求出  $f(t) = \cos(\frac{\pi}{3}t)U(t)$  作用下系统的零状态响应。

7.2 已知一离散系统的系统函数为  $H(z) = \frac{2z^2 + 3}{z^2 - 1.96z + 0.8}$ , 用 MATLAB 写出状态方程, 并由状态方程求出系统的单位样值响应。

7.3 已知某离散系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} f(n), \quad y(n) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix}$$

(1) 若  $\lambda(0^-) = [1 \ 2]^T$ , 求系统在  $f(n) = U(n)$  作用下的全响应。

(2) 定义新状态变量  $q_1(n) = \lambda_1(n) + \lambda_2(n)$ ,  $q_2(n) = 2\lambda_1(n) - \lambda_2(n)$ 。对变换后的系统, 重做(1)。(提示: 利用 ss2ss 函数)

# 部分习题答案

## 第 1 章

- 1.8 (1) 线性 时变 因果 (2) 非线性 时不变 因果  
 (3) 线性 时不变 因果 (4) 线性 时变 非因果  
 (5) 线性 时变 因果 (6) 线性 时变 因果  
 (7) 非线性 时变 因果 (8) 线性 时变 非因果  
 (9) 非线性 时不变 因果 (10) 线性 时变 非因果

## 第 2 章

- 2.5 (1) 0 (2) 1
- 2.6 (1)  $3\delta(t)$  (2) 3 (3)  $3U(t)$  (4)  $U(t)$  (5)  $U(t-2)$  (6)  $U(t)$  (7) 0 (8) -1  
 (9) -4 (10)  $4[\delta(t-2) - U(t-2)]$  (11)  $2\delta(t)$  (12)  $\delta(t) - 2U(t-1) - 2\delta(t-1)$
- 2.7 (1)  $e^{-1}\delta(t)$  (2)  $\delta'(t)$  (3)  $\delta(t) + 2U(t)$  (4) 25 (5) 2 (6) 4 (7) 0  
 (8) 10 (9)  $\frac{\pi}{4}$  (10) 2 (11)  $\frac{(3+\pi)}{6}$  (12)  $1 - e^{-j2}$  (13)  $\delta'(t) + 2\delta(t) - [\cos t + 4\sin 2t]U(t)$   
 (14)  $e^{-1} + 1$  (15)  $\frac{5}{8}\delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$  (16)  $4\delta'(t-1) - 4\delta(t-1)$
- 2.8 (1)  $\frac{\pi}{5}$  (2)  $\frac{\pi}{10}$  (3)  $\frac{\pi}{4}$  (4) 4 (5)  $\pi$  (6)  $\infty$  (7) 2 (8) 1 (9)  $\frac{2}{5}\pi$   
 (10)  $2\pi$  (11)  $1740\pi$
- 2.9  $i_1'''(t) + 2i_1''(t) + 2i_1'(t) + 3i_1(t) = f''(t) + 2f'(t) + f(t)$   
 $i_2'''(t) + 2i_2''(t) + 2i_2'(t) + 3i_2(t) = 2f''(t) + 3f'(t) + 3f(t)$   
 $i_3'''(t) + 2i_3''(t) + 2i_3'(t) + 3i_3(t) = f''(t) + 3f'(t)$
- 2.10  $u_1'''(t) + u_1''(t) + 3u_1'(t) + 2u_1(t) = 2f''(t) + 2f'(t)$   
 $u_2'''(t) + u_2''(t) + 3u_2'(t) + 2u_2(t) = 2f''(t)$
- 2.11  $u_0''(t) + 4u_0'(t) + 4u_0(t) = 3f(t)$
- 2.12 (1)  $2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t, t \geq 0$  (2)  $2e^{-2t} - 2e^{-3t}, t \geq 0$  (3)  $2e^{-t} \cos 2t, t \geq 0$  (4)  $(2t+1)e^{-t}, t \geq 0$
- 2.13 (1)  $2\cos t, t \geq 0$  (2)  $(2t-1)e^{-t} + e^{-2t}, t \geq 0$  (3)  $2e^{-t} - e^{-2t}, t \geq 0$   
 (4)  $e^{-t}(\cos t - 3\sin t), t \geq 0$  (5)  $1 - (t+1)e^{-t}, t \geq 0$
- 2.14  $y^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) = f(t) \quad h(t) = (1 - e^{-t})U(t)$
- 2.15 (1)  $y^{(3)}(t) + 4y^{(2)}(t) + 6y^{(1)}(t) + 4y(t) = 3f^{(1)}(t)$   
 (2)  $h(t) = 3[e^{-t}\cos t - e^{-2t}]U(t)$
- 2.16 (1)  $h(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})U(t)$  (2)  $h(t) = te^{-3t}U(t)$  (3)  $h(t) = \delta(t) - e^{-t}U(t)$   
 (4)  $h(t) = \delta'(t) - 3\delta(t) + 7e^{-2t}U(t)$  (5)  $h(t) = e^{-2t}U(t)$   
 (6)  $h(t) = (e^{-3t} - e^{-4t})U(t)$  (7)  $h(t) = \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3tU(t)$
- 2.17 (1)  $0.25(2t-1+e^{-2t})U(t)$  (2)  $0.5t^2 U(t)$   
 (3)  $0.5t^2[U(t) - U(t-2)] + 2(t-1)U(t-2)$  (4)  $(0.5t^2 - 3t + 4)U(t-4)$

- (5)  $(e^{-2t} - e^{-3t})U(t)$  (6)  $0.5(\sin t - t \cos t)U(t)$   
 (7)  $\frac{1}{\pi}(1 - \cos \pi t)[U(t) - U(t-4)]$  (8)  $\cos[\pi(t-1) + 45^\circ]$   
 (9)  $0.5(t^2 - 1)[U(t-1) - U(t-2)] + (-0.5t^2 + t + 1.5)[U(t-2) - U(t-3)]$   
 (10)  $\frac{1}{5}(2\sin t - \cos t + e^{-2t})U(t)$
- 2.18 (1)  $3y(t)$  (2)  $y(-t)$  (3)  $y(t+1)$  (4)  $y(t-1) - y(t+1)$  (5)  $y'(t)$  (6)  $y'(t)$  (7)  $y''(t)$   
 2.19  $\delta'(t) + 2e^{-2t}U(t) - \delta(t)$   
 2.20  $U(t) + 4e^{-2t}U(t) - 2\delta(t)$   
 2.21 (1)  $g(t) = (t-1)U(t) + e^{-t}U(t)$   
 (2)  $y(t) = [t-2 + e^{-(t-1)}]U(t-1) - [t-3 + e^{-(t-2)}]U(t-2)$   
 2.22  $t[U(t) - U(t-1)] + U(t)$   
 2.23  $U(t)$  积分器  
 2.24 (1)  $y(t) = (1.5e^{-t} - 3e^{-2t} + 1.5e^{-3t})U(t)$  (2)  $y(t) = [3e^{-t} - (2t+3)e^{-2t}]U(t)$   
 (3)  $y(t) = (1-t)e^{-2t}U(t)$  (4)  $y(t) = \left[t - \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{10}}{8}e^{-2t}\cos(2t + 71.5^\circ)\right]U(t)$
- 2.25 全响应  
 (1)  $6e^{-t} - 5e^{-2t} - 2te^{-t}, t \geq 0$  (2)  $e^{-2t} + 0.25\sin 2t - 0.25\cos 2t + 0.25e^{-2t}, t \geq 0$   
 (3)  $te^{-t} + 2e^{-t} - e^{-2t}, t \geq 0$
- 2.26 (1)  $4\Omega, 4\Omega, 0.25F$  (2)  $0.5(1 - e^{-2t}) + 2.5e^{-2t} + 2(1 - e^{-2t})V, t \geq 0$   
 2.27 (1)  $3e^{-3t}U(t) + [-e^{-3(t-1)} + \sin 2(t-1)]U(t-1)$  (2)  $2(2e^{-3t} + \sin 2t)U(t)$   
 2.28 (1)  $y_f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})U(t) - [e^{-t} - e^{-2(t-1)} - \beta e^{-2(t-2)}]U(t-2), \beta = e^{-4} - e^{-2}$   
 (2)  $\beta = -e^{-4} \int_0^2 e^{2\tau} f_1(\tau) d\tau$
- 2.29  $i_{3x}(t) = 1A, t \geq 0; i_{3f}(t) = \left(\frac{1}{3} - e^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-3t}\right)U(t)A$   
 2.30 (1)  $e^{-(t-2)}U(t-2)$  (2)  $[1 - e^{-(t-1)}]U(t-1) + [e^{-(t-4)} - 1]U(t-4)$

### 第3章

- 3.1 (1)  $\omega_0 = 2, T = \pi$  (2)  $\omega_0 = \pi, T = 2$  (3)  $\omega_0 = 2\pi, T = 1$  (4)  $\omega_0 = 10, T = \frac{\pi}{5}$   
 (5)  $\omega_0 = 2\pi, T = 1$  (6)  $\omega_0 = 1, T = 2\pi$  (7)  $\omega_0 = 1, T = 2\pi$
- 3.2  $f(t) = 4\cos \frac{\pi}{4}t + 8\cos\left(\frac{3}{4}\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$
- 3.3  $\omega_0 = \frac{\pi}{3}, F_0 = 2, F_2 = F_{-2} = \frac{1}{2}, F_5 = F_{-5} = -2j$   
 $f(t) = 2 + \frac{1}{2}(e^{j\frac{2}{3}\pi t} + e^{-j\frac{2}{3}\pi t}) - 2j(e^{j\frac{5}{3}\pi t} - e^{-j\frac{5}{3}\pi t})$
- 3.4 (1)  $f(t) = \frac{8}{\pi^3}(\sin \pi t + \frac{1}{9}\sin 3\pi t + \frac{1}{5^3}\sin 5\pi t + \cdots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(k\pi)^3} \sin k\pi t, k \text{ 为奇数}$   
 (2)  $f'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(k\pi)^2} \cos k\pi t, k \text{ 为奇数}; f''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{k\pi} \sin k\pi t, k \text{ 为奇数}$
- 3.5  $F_{1n} = F_{2n} e^{-jn\omega_0 \frac{T}{4}}, F_{3n} = F_{4n} e^{-jn\omega_0 \frac{T}{4}}$   

$$F_{3n} = \begin{cases} \frac{1}{2}F_{1n}, & n \neq 0 \\ \frac{1}{2}F_{1n} + \frac{A}{2}, & n = 0 \end{cases} \quad F_{4n} = \begin{cases} \frac{1}{2}F_{2n}, & n \neq 0 \\ \frac{1}{2}F_{2n} + \frac{A}{2}, & n = 0 \end{cases}$$



$$3.6 \quad (1) a_0 = \frac{A}{2}, \quad b_n = 0, \quad a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ -4A/(n\pi)^2, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$(2) a_n = \frac{A}{4}, \quad b_n = 0, \quad a_n = \begin{cases} 4A/(n\pi)^2, & n \text{ 为奇数} \\ 8A/(n\pi)^2, & n = 2(2k+1), k=0,1,2,\dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$3.7 \quad L \geq 7.64\text{H}$$

$$3.8 \quad F_n = \frac{(-1)^n(e^2 - 1)}{2e(1 + jn\pi)}$$

$$3.9 \quad (1) F_1 = \frac{1}{4(2 + j\pi)} = F_{-1}^*, \quad F_n = 0, \quad \text{其他} \quad (2) F_n = \frac{1}{4 + j2n\pi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$3.10 \quad (1) 1000\text{kHz}, \quad 2000\text{kHz}, \quad \frac{1000}{3}\text{kHz}, \quad \frac{2000}{3}\text{kHz} \quad (2) 1:3 \quad (3) 3$$

$$3.11 \quad (a) F(j\omega) = \frac{4 \left[ \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^2}{\omega^2} \quad (b) F(j\omega) = \frac{\pi}{\pi^2 - \omega^2} (1 + e^{-j\omega})$$

$$(c) F(j\omega) = \frac{1}{2\omega^2} (1 - j2\omega - e^{-j2\omega}) \quad (d) F(j\omega) = \text{Sa} \frac{\omega}{2} e^{-j\frac{\omega}{2}}$$

$$3.12 \quad (a) F(j\omega) = 2\tau \text{Sa}\omega\tau - \tau \text{Sa}^2\omega\tau \quad (b) F(j\omega) = \frac{j}{\omega^2} (2\omega \cos 2\omega - \sin 2\omega)$$

$$(c) F(j\omega) = j \frac{4}{\omega} \sin^2 \frac{\omega\tau}{2} \quad (d) \omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad F(j\omega) = \frac{j2\omega_1 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 - \omega_1^2}, \quad \omega \neq \omega_1, F(j\omega_1) = \frac{T}{2j}$$

$$3.13 \quad (1) F(j\omega) = \frac{1}{3 + j\omega} (e^{6 + j2\omega} - e^{-9 - j3\omega}) \quad (2) F(j\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} e^{-j2\omega}$$

$$(3) F(j\omega) = \frac{e^{3 - j\omega}}{1 - j\omega} \quad (4) F(j\omega) = e^{-j2(\omega + 1)}$$

$$3.14 \quad (1) \omega_1 + \omega_2 \quad (2) \omega_2 \quad (3) \omega_1 \quad (4) \min(2\omega_1, \omega_2) \quad (5) 2\omega_1 + \omega_2$$

$$3.15 \quad (1) 2\pi e^{-\beta|\omega|} \quad (2) g_{4\pi}(\omega) e^{-j\omega} \quad (3) \frac{1}{2} g_{8\pi}(\omega) \left[ 1 - \frac{|\omega|}{4\pi} \right] \quad (4) -j \text{sgn}(\omega)$$

$$3.16 \quad (1) \frac{1}{3} F\left(j \frac{\omega}{3}\right) e^{-j\frac{5}{3}\omega} \quad (2) F(-j\omega) e^{-j\omega} \quad (3) \frac{j}{3} F'\left(j \frac{\omega}{3}\right) \quad (4) \frac{1}{2} F\left(j \frac{1-\omega}{2}\right) e^{-j\frac{3(\omega-1)}{2}}$$

$$(5) -jF'(-j\omega) e^{-j\omega} \quad (6) 2[jF'(j\omega) - F(j\omega)] \quad (7) -F(j\omega) - \omega F'(j\omega) \quad (8) j(\omega + \omega_0) F[j(\omega + \omega_0)]$$

$$(9) \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega} e^{j5\omega} \quad (10) \pi F(0) \delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} F(-j2\omega) e^{-j2\omega} \quad (11) |\omega| F(j\omega)$$

$$(12) [-\omega F(-j\omega) e^{-j\omega}]' \quad (13) j e^{-j6} \{F[j(\omega - 2)]\}' - 2e^{-j6} F[j(\omega - 2)]$$

$$(14) \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right] \quad (15) \frac{1}{2} \{F[j(\omega + 2)] + F[j(\omega - 2)]\} \quad (16) \frac{\pi}{2} F(j\omega) g_4(\omega)$$

$$3.17 \quad (1) \frac{1}{2} [e^{j\frac{\pi}{3}} \delta(t + 4) + e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta(t - 4)] \quad (2) \frac{4}{\pi} \text{Sa}(4t) \quad (3) \frac{2j}{\pi} \sin t + \frac{3}{\pi} \cos 2\pi t$$

$$3.18 \quad (1) t e^{-2t} U(t) \quad (2) t \text{sgn} t \quad (3) 3 - e^{2t} U(-t) - e^{-3t} U(t) \quad (4) \frac{1}{2} e^{j\pi t} g_6(t) \quad (5) -\delta''(t)$$

$$(6) \frac{1}{2\pi} e^{j3t} \quad (7) \frac{1}{\pi} \text{Sa}(t - 2) e^{j(t-2)} \quad (8) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n g_2(t - 2k) \quad (9) \frac{1}{2\pi(2 + jt)}$$

$$3.19 \quad (1) |\omega| \quad (2) j\omega + e^{j(-\frac{3}{2}\omega)} \quad (3) 2\text{Sa}\omega + \text{Sa}(\omega + \pi) + \text{Sa}(\omega - \pi) \quad (4) 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega) \quad (5) j\pi \text{sgn}(-\omega)$$

$$3.20 \quad (a) j\pi \delta'(\omega) + \left(\frac{1}{\omega}\right)' \quad (b) 2\pi j \delta'(\omega) \quad (c) 2\left(\frac{1}{\omega}\right)'$$

$$(d) 3\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \text{Sa}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}} \quad (e) \frac{2}{j\omega} \text{Sa}(\omega) \quad (f) 4\pi \delta(\omega) - 8\text{Sa}(2\omega) + 6\text{Sa}(\omega)$$

- 3.21 (b)  $2[\text{Sa}^2(\omega + 5\pi)\cos(3\omega + 15\pi) + \text{Sa}^2(\omega - 5\pi)\cos(3\omega - 15\pi)]$
- 3.22 (1)  $(e^{-4t} - e^{-2t} + 2te^{-2t})U(t)$  (2)  $(e^{-4t} + te^{-4t} - e^{-2t} + te^{-2t})U(t)$  (3)  $e^{-t}U(t) + e^tU(-t)$
- 3.23 (a)  $2 + \frac{\omega_0 E}{\pi} \text{Sa}[\omega_0(t - t_0)]$  (b)  $-\frac{2E}{\pi t} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$
- 3.24  $f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\pi t}, n \neq 0; F_0 = \frac{1}{4}, F_n = \frac{1}{2\pi n^2} [(-1)^n - 1 + jn\pi(-1)^n], n \neq 0$
- 3.25 (1)  $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 3)(j\omega + 1)}, h(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})U(t)$   
 (2)  $y_f(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)U(t)$
- 3.26 (1)  $\frac{1}{4}\cos 2\pi t$  (2)  $4\cos 2\pi t + 3\sin 6\pi t$
- 3.27  $1 + 2\sin t - 2\cos 2t$
- 3.28 (1)  $1 + \frac{4}{\pi}\cos\frac{3}{2}\pi t$  (2)  $6\pi < B < \frac{15}{2}\pi$
- 3.29 (1)  $y(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})U(t) + 2(e^{-t} - te^{-t} - e^{-2t})U(t)$   
 (2)  $y(t) = \frac{1}{4}(e^{-2t} - \cos 2t + \sin 2t)U(t) + e^{-2t}U(t)$   
 (3)  $y(t) = (3e^{-t} - 2e^{-2t})U(t) + (-e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t})U(t)$
- 3.30 (1)  $\frac{\pi}{\omega_1 + \omega_2}$  (2)  $\frac{\pi}{\max(\omega_1, \omega_2)}$  (3)  $\frac{\pi}{\min(\omega_1, \omega_2)}$  (4)  $\frac{\pi}{2\omega_1}$  (5)  $\frac{\pi}{3\omega_1}$  (6)  $\frac{\pi}{2\omega_1}$
- 3.31 (1)  $\frac{\pi}{50}$  (2)  $\frac{\pi}{500}$  (3)  $\frac{\pi}{160}$
- 3.32 (1)  $f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT), F_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left[j\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)\right]$   
 (2)  $f_{sl}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\{U(t - nT) - U[t - (n+1)T]\}, F_{sl}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left[j\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)\right]\text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-j\frac{\omega T}{2}}$   
 (3)  $H(j\omega) = \frac{1}{\text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{-j\frac{\omega T}{2}}} \cdot g_{\frac{\pi}{T}}(\omega)$
- 3.33  $H(j\omega) = \frac{1 + R_1 R_2 + j\left(R_2 \omega - \frac{R_1}{\omega}\right)}{R_1 + R_2 + j\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)}, R_1 = R_2 = 1\Omega$
- 3.34  $R_1 = R_2, L_1 = L_2$
- 3.35  $i_L(t) = (e^{-t} + e^{-2t})U(t)$
- 3.36 (1)  $\frac{\pi}{2}$  (2)  $\frac{\pi}{16}$
- 3.37 (1)  $8$  (2)  $4\pi$  (3)  $\frac{64}{3}\pi$
- 3.38 (1)  $0.8\cos(2t + 36.9^\circ)$  (2)  $3 + \sin 2t$
- 3.39  $h(t) = 2\delta(t - 5) - 4\text{Sa}[2\pi(t - 5)]$
- 3.40  $y(t) = 2\text{Sa}(2t)\sin 4t$
- 3.41  $y(t) = 1 + 2\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$
- 3.42  $y(t) = \frac{2}{\pi}\text{Sa}(t)\cos 5t$

## 第4章

- 4.1 (1)  $s_{1,2} = -1 \pm j5$  (2)  $s = -1$  (3)  $s_{1,2} = \pm j2$  (4)  $s_{1,2} = -1 \pm j2$
- 4.2 (1)  $\frac{(s+1)e^{-\alpha}}{(s+1)^2 + \omega^2}$  (2)  $\frac{2s+11}{s+7}$  (3)  $\frac{2s+1}{s^2+1}$  (4)  $\frac{1-e^{-2s}}{s+1}$   
 (5)  $\frac{\pi(1-e^{-s})}{s^2 + \pi^2}$  (6)  $\frac{1}{s(s+1)}$  (7)  $\frac{1-e^{-2(s+1)}}{s+1}$  (8)  $\frac{(1-e^{-s})^2}{s}$   
 (9)  $2e^{-s_0} + 3$  (10)  $\frac{e^{-s}}{s^2}$  (11)  $\frac{2}{(s+1)^2 + 4}$  (12)  $\frac{1}{s+\beta} - \frac{s+\beta}{(s+\beta)^2 + \alpha^2}$   
 (13)  $\frac{(s+\alpha)\cos\theta - \omega\sin\theta}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$  (14)  $\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+8}$
- 4.3 (1)  $\frac{s}{s^2+9}e^{-\frac{2}{3}s}$  (2)  $\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}s}$  (3)  $\frac{2-s}{\sqrt{2}(s^2+4)}$  (4)  $\frac{1-s}{s^2}$  (5)  $\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{4}{s^2}\right)$   
 (6)  $\frac{3(s^2-4)}{4(s^2+4)^2} + \frac{s^2-36}{4(s^2+36)^2}$  (7)  $\frac{2(s+\alpha)}{[(s+\alpha)^2+1]^2}$  (8)  $\frac{s^3-4s+6}{s^4}$  (9)  $\frac{2s^3-24s}{(s^2+4)^3}$   
 (10)  $-\ln\left(\frac{s}{s+\alpha}\right)$  (11)  $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{\alpha}$  (12)  $\ln\left(\frac{s+5}{s+3}\right)$  (13)  $\frac{1}{1-\alpha e^{-sT}}$   
 (14)  $\left[\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{T}{s+1}\right]e^{-(s+1)T}$  (15)  $\frac{s+2}{(s+1)^2}e^{-(s-2)}$
- 4.4 (1)  $\frac{s^2\omega}{s^2+\omega^2}$  (2)  $\frac{-\omega^3}{s^2+\omega^2}$  (3)  $\frac{\omega}{s(s^2+\omega^2)}$  (4)  $\frac{\omega}{s^2(s^2+\omega^2)}$  (5)  $\frac{-2s}{(s^2+1)^2}$
- 4.5 (1)  $\alpha F(\alpha s + \alpha^2)$  (2)  $\alpha F(\alpha s + 1)$  (3)  $\frac{-1}{|\alpha|}\left[F\left(\frac{s}{\alpha}\right)e^{-\frac{\beta}{\alpha}s}\right],$   
 (4)  $\frac{-1}{|\alpha|}\left[F\left(\frac{s+\alpha}{\alpha}\right)e^{-\frac{\beta}{\alpha}(s+\alpha)}\right],$  (5)  $\int_s^\infty \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)e^{-\frac{\beta}{\alpha}\eta}d\eta$  (6)  $\frac{1}{|\alpha|s}F\left(\frac{s}{\alpha}\right)e^{-\frac{\beta}{\alpha}s}$
- 4.6 (1)  $\delta(t) + 3(t-1)e^{-t}U(t)$  (2)  $\delta'(t) - 2\delta(t) + (e^{-t} + 3e^{-2t})U(t)$  (3)  $(\cos t + \sin t)e^{-t}U(t)$   
 (4)  $\frac{1}{5}tU(t) - \frac{1}{5}(t-4)U(t-4)$  (5)  $\frac{1}{2}[\sin t - t\cos t]U(t)$  (6)  $(2e^{-4t} - e^{-2t})U(t)$   
 (7)  $2[1 - (1-t)e^t]U(t)$  (8)  $U(t) - e^{-t}\cos 2tU(t)$  (9)  $[7e^{-3t} - 3e^{-2t}]U(t)$   
 (10)  $[e^{-t}(t^2 - t + 1) - e^{-2t}]U(t)$
- 4.7 (1)  $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k U(t-k)$  (2)  $\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \delta(t-k)$  (3)  $\frac{1}{t}(e^{-9t} - 1)U(t)$  (4)  $\sum_{k=0}^\infty U(t-k)$   
 (5)  $\sum_{k=0}^\infty \sin \pi(t-2k)\{U(t-2k) - U[t-(2k+1)]\}$  (6)  $\sum_{k=0}^\infty \sin \pi(t-k)\{U(t-k) - U[t-(k+1)]\}$
- 4.8 (1)  $\frac{1}{\tau s^2}(1 - e^{-s\tau} - e^{-s(T-\tau)} + e^{-sT})$  (2)  $\frac{s}{s^2 + (2\pi)^2}(1 - e^{-s})$   
 (3)  $\frac{1}{s^2}(1 - e^{-s})^2$  (4)  $\frac{1}{s}(2 - e^{-s} - 2e^{-2s} + e^{-3s})$
- 4.9 (1)  $e^{-3t}U(t-2)$  (2)  $\delta(t) + (2e^{-t} - e^{-2t})U(t)$   
 (3)  $tU(t) - 2(t-1)U(t-1) + (t-2)U(t-2)$  (4)  $-\frac{1}{5}\left[e^{-2t} - \left(\cos 3t + \frac{4}{3}\sin 3t\right)e^{-t}\right]U(t)$   
 (5)  $\frac{2\pi}{1+4\pi^2}\left(e^{-\frac{t}{2}} - \cos \pi t + \frac{1}{2\pi}\sin \pi t\right)U(t)$  (6)  $\delta(t) + \sin tU(t)$   
 (7)  $(6e^{-4t} - 3e^{-2t})U(t)$  (8)  $\delta(t) - e^{-3t}(6\cos 2t - \frac{9}{2}\sin 2t)U(t)$   
 (9)  $(e^{-t} - e^{-2t})U(t) + [e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}]U(t-1) + [e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}]U(t-2)$   
 (10)  $(3e^{-4t} - e^{-3t})U(t)$  (11)  $\frac{1}{2}[3 - e^{-2t}]U(t)$

- (12)  $2e^t \sin t U(t) + e^t \sin(t-1) U(t-1)$  (13)  $\frac{1}{t}(1-e^{-t}) U(t)$
- 4.10 (1)  $f(0^+) = 1, f(\infty) = 0$  (2)  $f(0^+) = 1, f(\infty) = 1$  (3)  $0, 0$  (4)  $1$ , 不存在  
(5)  $2, 0$  (6)  $3, 1$  (7)  $-5, 0$  (8)  $1$ , 不存在
- 4.11 (a)  $\frac{s^2}{s^2+3s+1}$  (b)  $\frac{s}{10s^2+s+10}$  (c)  $\frac{1}{(4s^2+1)^2+(4s^2+1)-1}$  (d)  $\frac{s}{10s+10}$
- 4.12 (1)  $F_1(s) = \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}$  (2)  $F_2(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}$   
(3)  $F_3(s) = \frac{1}{1+e^{-s}}$  (4)  $F_4(s) = \frac{(1-e^{-s})}{s^2(1+e^{-s})} - \frac{e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$
- 4.13  $h(t) = 3\delta(t) + (2e^{-2t} + 16e^{3t})U(t)$
- 4.14 (1)  $y_f(t) = (e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t})U(t)$  (2)  $y_f(t) = (2t+1-e^{-2t})U(t)$   
(3)  $y_f(t) = (e^{-3t} - e^{-2t} + e^{-t})U(t)$
- 4.15  $y_f(t) = [1 + e^{-(t-2)}]U(t-2)$
- 4.16  $H(s) = \frac{s+2}{2s+3}$   $g(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-\frac{3}{2}t}\right)U(t)$
- 4.17  $i(t) = 2\left[\delta(t) + \frac{1}{12}e^{-\frac{t}{6}}U(t)\right]Q = 2C$
- 4.18  $f(t) = [1 - 0.5e^{-2t}]U(t)$
- 4.19 (1)  $H(j\omega) = \frac{1}{1-\omega^2} + j\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)]$  (2)  $H(s) = \frac{1}{s^2+1}$  (3)  $h(t) = \sin t U(t)$
- 4.20 (1)  $\left[\frac{3}{2} + 2e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t}\right]U(t)$  (2)  $[5e^{-t} - 4e^{-2t}]U(t)$
- 4.21 (1)  $h(t) = te^{-t}U(t)$  (2)  $u_C(0^-) = 0, i_L(0^-) = 1A$  (3)  $u_C(0^-) = 1V, i_L(0^-) = 0$
- 4.22 (1)  $H(s) = \frac{1-s}{s+1}$  (2)  $h(t) = -\delta(t) + 2e^{-t}U(t), g(t) = (1-2e^{-t})U(t)$   
(3)  $u_{of}(t) = (e^{-t} - \cos t)U(t)$
- 4.23  $f(t) = e^{-t}U(t)$  或  $-e^{-t}U(t)$
- 4.24  $h(t) = (4e^{-2t} - 2e^{-3t})U(t)$
- 4.25  $f(t) = e^{-10t}U(t)$
- 4.26  $R=2\Omega, L=2H, C=0.25F$
- 4.27 (a) (1)  $\frac{-3(s+2)}{(s-1)(s+6)}$  (2)  $\left(1 - \frac{9}{7}e^t + \frac{2}{7}e^{-6t}\right)U(t)$   
(b) (1)  $\frac{-10(s-1)}{(s+5)(s+1)(s+2)}$  (2)  $(1 - 5e^{-t} + 5e^{-2t} - e^{-5t})U(t)$
- 4.28  $u_{if}(t) = -4\delta(t) - (16e^{-2t} - 36e^{-3t})U(t)$
- 4.29  $u_C(t) = \left(1 + \frac{1}{3}e^{-t}\cos t + \frac{5}{3}e^{-t}\sin t\right)U(t)$
- 4.30 (1)  $H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{C}s + \frac{1}{LC}}$  (2)  $LC = \frac{1}{4}$  (3)  $u_o(t) = (1-2t)e^{-2t}U(t)$
- 4.31  $u_C(t) = [(1-t)e^{-t} - e^{2t}]U(t)$
- 4.32 (1)  $H(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}, h(t) = (3e^{-2t} - e^{-t})U(t)$   
(2)  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2f'(t) + f(t)$   
(3)  $y_f(t) = (-5e^{-3t} + 6e^{-2t} - e^{-t})U(t)$

- 4.33  $H(s) = \frac{2s}{s^2 + 2s + 2}$
- 4.34 (1)  $H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$ , ROC:  $(-1, \infty)$  (2) 稳定  $H(j\omega) = \frac{1}{j3\omega + 2 - \omega^2}$
- (3)  $h(t) = [-e^{-2t} + e^{-t}]U(t)$ ,  $g(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t}\right]U(t)$
- (4)  $y_f(t) = [e^{-2t} + te^{-t} - e^{-t}]U(t)$  (5)  $f(t) = \delta'(t) + e^{-2t}U(t)$
- 4.35 (1)  $y_x(t) = e^{-t}U(t)$  (2)  $y(t) = U(t)$
- 4.36 (a) 高通 (b) 带阻 (c) 低通 (d) 带通
- 4.37  $u_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{ [1 - e^{-(t-2k)}]U(t-2k) - [1 - e^{-(t-2k-1)}]U(t-2k-1) \}$
- 4.38 (1)  $H(s) = \frac{2k(2s^2 + s + 1)}{6s^2 + (5-2k)s + 3}$  (2)  $k < 2.5$
- (3)  $y_f(t) = \left[ -e^{-\frac{1}{3}t} \cos\left(\sqrt{\frac{7}{18}}t\right) + \sqrt{\frac{18}{7}}e^{-\frac{1}{3}t} \sin\sqrt{\frac{7}{18}}t + \cos t + 7\sin t \right]U(t)$
- (4)  $y_f(t) = \left[ \frac{5}{3} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t\right) - \frac{5}{3}(\cos t - \sin t) \right]U(t)$
- 4.39 (1)  $H(s) = \frac{s^2 + (k+4)s + 3k + 3}{s^2 + 3s + 2 - k}$  (2)  $k < 2$
- 4.40 (1)  $H(s) = \frac{s}{s^2 + (4-k)s + 4}$  (2)  $k < 4$  (3)  $H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega + 2)^2}$
- (4)  $k = 4$ ,  $H(j\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + 2) + \delta(\omega - 2)] + \frac{j\omega}{4 - \omega^2}$
- (5)  $h_1(t) = (e^{-2t} - 2te^{-2t})U(t)$ ,  $h_2(t) = \cos 2tU(t)$
- 4.41 (1)  $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^2)^2}}$ ,  $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\omega - \omega^3}{1 - 2\omega^2}$
- (2)  $\omega = 0$  时,  $|H(j\omega)| = 1 = \max$ ,  $\varphi(\omega) = 0$
- (3) 三阶低通滤波器,  $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$
- 4.42 (b)  $u_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t-k)}U(t-k)$
- (c)  $u_c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{ (t-k-1)[U(t-k) - U(t-k-1)] + e^{-(t-k)}U(t-k) \}$
- 4.43 (1)  $b > 0$  (2) 2

## 第5章

- 5.1 (1)  $f(n) = (n^2 - 2)U(n)$  (2)  $f(n) = (-1)^{n+1}U(n)$  (3)  $f(n) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right]U(n)$  (4)  $f(n) = n \cdot 2^n U(n)$
- 5.2 (1) 否 (2)  $N = 16$  (3)  $N = 7$  (4)  $N = 40$
- 5.3  $y(n) - (\alpha + 1)y(n-1) = f(n)$
- 5.4  $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = 0$
- 5.5  $y(n) - 2y(n-1) + y(n-3) = 0$
- 5.6 (a)  $y(n) + y(n-1) = a_0f(n) + a_1f(n-1)$  (b)  $y(n) - y(n-1) + 0.5y(n-2) = f(n-1)$
- (c)  $y(n) = 4f(n-1) + 3f(n-2) + 2f(n-3)$  (d)  $y(n) + 2y(n-1) + 3y(n-2) = f(n)$
- 5.7 (1)  $\left[-4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]U(n)$  (2)  $\left[-\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]U(n)$

- (3)  $[5(-1)^n - 3(-2)^n]U(n)$  (4)  $4(3)^n \cos \frac{n\pi}{2} U(n)$  (5)  $(2n+1)(-1)^n U(n)$
- (6)  $\left[-\frac{5}{4}n(-2)^n + \frac{3}{4}n^2(-2)^n\right]U(n)$  (7)  $\left[24\left(\frac{1}{2}\right)^n - 9\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]U(n)$
- 5.8 (1)  $-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}U(n)$  (2)  $[2(-1)^n - 4(-2)^n]U(n)$  (3)  $3^n - (n+1)2^n U(n)$
- 5.9 (1)  $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]U(n)$  (2)  $\left[\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]U(n)$  (3)  $4(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n U(n-1)$
- (4)  $(-1)^{n-1}U(n-1)$  (5)  $[0.8^{n-1} - (-0.2)^{n-1}]U(n-1)$  (6)  $2^n(\sqrt{2})^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)U(n)$
- 5.10 (a)  $h(n) = (-1)^{n-1}U(n-1) + \delta(n-1)$  (b)  $h(n) = 3^{n-1}U(n-1)$
- (c)  $h(n) = [-1 + 4(3)^n]U(n)$  (d)  $h(n) = [2^n - 2]U(n)$
- 5.11 (1)  $\{5, 3.5, 6.5, 10.5, 7.5, 9, 6.5, 2.5, 0.5, 0.5\}_0$  (2)  $\{2, 9, 11, 16, 18, 20, 8\}_0$
- (3)  $\{12, 32, 14, -8, -26, 6\}_{-2}$  (4)  $\{2, 6, 6, 2\}_0$  (5)  $\delta(n)$  (6)  $\{1, 3, 6, 6, 5, 3\}_0$
- 5.12 (1)  $\left[\frac{e^{-2(n+1)} - e^{-3(n+1)}}{e^{-2} - e^{-3}}\right]U(n)$  (2)  $(n+1)2^n U(n)$  (3)  $2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]U(n)$
- (4)  $(n+1)U(n) - 2(n-3)U(n-4) + (n-7)U(n-8)$
- (5)  $\frac{n}{3!}(n+1)(n-1)U(n)$  (6)  $0$  (7)  $-\frac{1}{2}n \cos \frac{n\pi}{2} U(n)$  (8)  $2^n \sum_{m=0}^n \sin \frac{m\pi}{2} / 2^m$
- 5.13 (a)  $\{0, 1, 3, 6, 6, 5, 3\}_0$  (b)  $\{1, 2, 3, 2, 1\}_0$  (c)  $\{1, 2, 2, 1, -2\}$
- 5.14 (1)  $y_x(n) = U(n)$ ,  $y_f(n) = nU(n)$
- (2)  $y_x(n) = \left[-\frac{1}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}(2)^n\right]U(n)$ ,  $y_f(n) = \left[-\frac{1}{5}(2)^n - \frac{3}{35}(-3)^n + \frac{2}{7}(4)^n\right]U(n)$
- (3)  $y_x(n) = 2(-2)^n U(n)$ ,  $y_f(n) = [2(-2)^n + n + 2]U(n)$
- (4)  $y_x(n) = [- (2)^{n+1} + (3)^{n+1}]U(n)$ ,  $y_f(n) = \left[\frac{1}{2} - (2)^n + \frac{1}{2}(3)^n\right]U(n)$
- (5)  $y_x(n) = [2n(-1)^n - (-1)^n]U(n)$ ,  $y_f(n) = \left[-\frac{1}{4}n(-1)^{n-1} + \frac{9}{16}(3)^n + \frac{7}{16}(-1)^n\right]U(n)$
- (6)  $y_x(n) = (2n-1)(-1)^n U(n)$ ,  $y_f(n) = \left[\left(2n + \frac{8}{3}\right)(-1)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]U(n)$
- 5.15 (1)  $h(n) = (-0.5)^n U(n)$  (2) (a)  $y_f(n) = (n+1)(-0.5)^n U(n)$ , (b)  $y_f(n) = \delta(n)$
- 5.16 (2)  $h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \left[\frac{1}{2}(-2)^n - (-1)^n\right]U(n)$  (3)  $y(n) = \left[\frac{9}{2}(-1)^n - \frac{11}{3}(-2)^n + \frac{1}{6}\right]U(n)$
- 5.17 (1)  $h(n) = \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]U(n)$  (2)  $y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = f(n)$
- 5.18  $y_f(n) = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}U(n)$
- 5.19 (1)  $y_x(n) = \left[-\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}(0.5)^n\right]U(n)$  (2)  $y_x(n) = [(-1)^n - 2(-2)^n]U(n)$
- 5.20  $f(n) = -nU(n)$
- 5.21 (2)  $h(n) = (n+1)(-1)^n U(n)$  (3)  $y(n) = \left[-\frac{9}{16}(-1)^n + \frac{9}{4}n(-1)^n + \frac{9}{16}(3)^n\right]U(n)$
- 5.22 (2)  $h(n) = (-2)^n U(n)$   $g(n) = \frac{2}{3}(-2)^n U(n) + \frac{1}{3}U(n)$
- (3)  $y(n) = \left[\frac{13}{9}(-2)^n + \frac{1}{3}n - \frac{4}{9}\right]U(n)$
- 5.23  $h(n) = \left[3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]U(n) + 2\delta(n)$

## 第6章

6.1 (1)  $F(z) = z^{-2}$ , ROC:  $z \neq 0$  (2)  $F(z) = \frac{z}{z-0.5}$ , ROC:  $0 < |z| < \frac{1}{2}$

(3)  $F(z) = \frac{z^3 - 0.5^3}{z^2(z-0.5)} = \frac{z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}}{z^2}$ ,  $|z| > 0$  或  $z \neq 0$

(4)  $F(z) = \frac{0.5}{z-0.5} - \frac{2}{z-2}$ ,  $0.5 < |z| < 2$  (5)  $F(z) = \frac{z}{z-1}$ ,  $|z| < 1$

(6)  $F(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-0.5}$ ,  $|z| > 2$

6.2 (1)  $\frac{z}{z+1}$ ,  $|z| > 1$  (2)  $\frac{z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z}{z^2 - \sqrt{2}z + 1}$ ,  $|z| > 1$

(3)  $\frac{z+1}{z}$ ,  $|z| > 0$  或  $z \neq 0$  (4)  $\frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-4}$ ,  $|z| > 4$

6.3 (1)  $2^n U(-n-1) + \left(\frac{1}{3}\right)^n U(n)$  (2)  $\left[-2^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] U(n)$  (3)  $\left[2^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] U(-n-1)$

6.4 (1)  $\frac{2z^2}{z^2-1}$  (2)  $\frac{z^3 + z - 0.5}{z^2(z-0.5)}$  (3)  $\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$  (4)  $\frac{z^4 - z^2 + 1}{z^4 - z^3}$

(5)  $\frac{4z^2}{4z^2+1}$  (6)  $\frac{z}{z-2e^{-3}}$  (7)  $\frac{3e^{-2}z \sin \omega}{z^2 - 6e^{-2}z \cos \omega + 9e^{-4}}$  (8)  $\frac{z^2 - z}{\sqrt{2}(z^2+1)}$

6.5 (1)  $\frac{-2z^2+3z}{(z-1)^2}$  (2)  $\frac{1}{2} \left[ \frac{ze^{-j\omega}}{(z-e^{-j\omega})^2} + \frac{ze^{j\omega}}{(z-e^{j\omega})^2} \right]$  (3)  $\frac{2z}{(z-1)^3}$

(4)  $\frac{z^3-z}{(z-1)^4} - \frac{4z}{(z-2)^2} + \frac{z}{z-4}$  (5)  $\frac{z^{-1}}{z^{-1}-e^{-j\omega}}$  (6)  $\frac{1}{1-ze^2}$  (7)  $\frac{z}{(z-2)^2}$

(8)  $\frac{z^3}{(z-1)^2}$  (9)  $\frac{z^2(z+1)}{(z-1)^4}$  (10)  $\frac{-\frac{1}{2}z^2}{z-2}$  (11)  $-\frac{2z}{(z-1)^3}$  (12)  $\frac{1}{(2z-1)^2}$

6.6 (1)  $f(0)=1$ ,  $f(\infty)=0$  (2)  $f(0)=1$ ,  $f(\infty)$  不存在

(3)  $f(0)=1$ ,  $f(\infty)=2$  (4)  $f(0)=1$ ,  $f(\infty)=2$

(5)  $f(0)=1$ ,  $f(\infty)=2^N$  (6)  $f(0)=1$ ,  $f(\infty)$  不存在

(7)  $f(0)=0$ ,  $f(\infty)=0$  (8)  $f(0)=0$ ,  $f(\infty)$  不存在

6.7 (1)  $\frac{z}{z-e^{-2}}$  (2)  $\frac{e^{-2}z}{(z-e^{-2})^2}$

6.8 (1)  $F(e^{\alpha}z)$  (2)  $z \frac{dF(z)}{dz} + z^2 \frac{d^2F(z)}{dz^2}$  (3)  $\frac{z}{z-1} F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$  (4)  $z^{-1} F(z)$

(5)  $z^{-1} F(z)$  (6)  $z[F(z) - f(0)]$  (7)  $zF(z)$  (8)  $\frac{z}{z-\alpha} F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$

6.9 (1)  $\left[\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3}(2)^n\right] U(n)$  (2)  $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] U(n)$

(3)  $2\delta(n) - [(-1)^{n-1} - 6(5)^{n-1}] U(n-1)$  (4)  $[(-1)^n + 2n-1] U(n)$

(5)  $2\delta(n-1) + 6\delta(n) + [8 - 13(0.5)^n] U(n)$  (6)  $\frac{1}{6}n \cdot 6^n U(n)$

6.10 (1)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^n U(n)$  (2)  $\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) + 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi n - \frac{\pi}{3}\right) U(n)$

(3)  $\left[\frac{3}{2}\delta(n) - (-1)^n + \frac{\sqrt{5}}{2}(2)^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 63.4^\circ\right)\right] U(n)$  (4)  $n^2 \cdot 2^{n-1} U(n)$

- (5)  $\delta(n-1) + 2\delta(n-3) + 4\delta(n-5)$       (6)  $\left[4 - (n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]U(n)$
- 6.11  $\frac{z^2(2z-1.5)}{(z-0.5)(z-1)^2}$
- 6.12  $y(n) = \frac{n(n+1)}{2}$
- 6.13  $f(n) = U(n)$
- 6.14  $f(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]U(n)$
- 6.15  $f(n) = 2\delta(n) + [2 - 4(0.5)^2]U(n)$
- 6.16  $F(z) = \frac{2z^2}{z^2 - 0.5z + 0.25}, \quad |z| > 0.5$
- 6.17 (1)  $y(n) = \left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]U(n)$       (2)  $y(n) = \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n - n\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]U(n)$   
(3)  $y(n) = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}(-1)^n\right]U(n)$
- 6.18 (1)  $\frac{1}{20}[3^n - 5(-1)^n + 4(-2)^n]U(n)$       (2)  $\left[2(-1)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8(2)^n\right]U(n)$   
(3)  $\left(1 - \cos\frac{2\pi}{3}n + \sqrt{3}\sin\frac{2}{3}\pi n\right)U(n)$       (4)  $\left[2^{n+1} + \frac{1}{2}(-1)^n - \frac{3}{2}\right]U(n)$
- 6.19 (1)  $H(z) = \frac{2z+1}{z-1}$       (2)  $h(n) = 2\delta(n) + 3U(n-1)$  或  $-\delta(n) + 3U(n)$   
(3)  $g(n) = (2+3n)U(n)$
- 6.20 (1)  $H(z) = \frac{3z^2+2z-1}{z^3}$       (2)  $h(n) = 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) - \delta(n-3)$   
(3)  $g(n) = 3U(n-1) + 2U(n-2) - U(n-3)$
- 6.21  $H(z) = 2 - \frac{z-1}{z-0.5} + \frac{z-1}{z+1.5}$        $h(n) = -\frac{2}{3}\delta(n) + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{5}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right]U(n)$
- 6.22  $y(n) - \frac{7}{12}y(n-1) + \frac{1}{12}y(n-2) = f(n) - \frac{1}{2}f(n-1)$        $h(n) = \left[-2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]U(n)$
- 6.23  $f(n) = \left[\frac{1}{2}\delta(n) - \frac{9}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]U(n)$
- 6.24  $f(n) = (n+1)U(n)$
- 6.25 (1)  $\frac{2}{3}[-0.5^n + 2^n]U(n)$       (2)  $\left(\frac{1}{3}\right)^n U(n) + 2^n U(-n-1)$       (3)  $\left[2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]U(-n-1)$
- 6.26 (1)  $H(z) = \frac{z^2+z}{z^2+5z+6}$       (2)  $y(n+2) + 5y(n+1) + 6y(n) = f(n+2) + f(n+1)$   
(3)  $h(n) = [2(-3)^n - (-2)^n]U(n)$
- 6.27 (1)  $H(z) = \frac{3z^3-5z^2-6z}{(z^2-1)(z-3)}$       (2)  $y(n) - 3y(n-1) - y(n-2) + 3y(n-3) = 3f(n) - 5f(n-1) - 6f(n-2)$   
(3)  $h(n) = \left[2 + \frac{3}{4}(3)^n + \frac{1}{4}(-1)^n\right]U(n)$       (4)  $\left[\frac{5}{12}(-1)^n + 6 + \frac{33}{20}(3)^n - \frac{31}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]U(n)$
- 6.28 (1)  $H(z) = \frac{2+3z^{-1}}{1+2z^{-1}+z^{-2}}$       (2)  $y(n) + 2y(n-1) + y(n-2) = 2f(n) + 3f(n-1)$   
(3)  $h(n) = [-n(-1)^n + 2(-1)^n]U(n)$   
(4)  $y_f(n) = \left(\frac{5}{4} + \frac{5}{6}n(-1)^n + \frac{43}{36}(-1)^n + \frac{14}{9}(2)^n\right)U(n)$



$$6.29 \quad (1) H(z) = \frac{2z^2}{\left(z + \frac{1}{2}\right)(z-2)} \quad (2) h(n) = \left[ \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{8}{5} (2)^n \right] U(n)$$

$$(3) y(n) - \frac{3}{2}y(n-1) - y(n-2) = 2f(n) \quad (4) f(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1)$$

$$6.30 \quad (1) H(z) = \frac{4z(z+2)}{(z+3)(z+1)} \quad (2) h(n) = [2(-3)^n + 2(-1)^n] U(n)$$

$$(3) y(n) + 4y(n-1) + 3y(n-2) = 4f(n) + 8f(n-1)$$

$$(4) f(n) = \frac{1}{4}\delta(n) + \left[ \frac{1}{12}(-2)^{n-1} + \frac{2}{3} \right] U(n-1)$$

$$6.31 \quad (1) H(z) = \frac{12z^2}{(z-1)(3z+1)} \quad (2) h(n) = \left[ 3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right] U(n)$$

$$(3) 3y(n) - 2y(n-1) - y(n-2) = 12f(n) \quad (4) \frac{2}{3}\delta(n) + \frac{1}{6}\delta(n-1) - \frac{5}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^n U(n)$$

$$6.32 \quad -2 < k < 0$$

$$6.33 \quad -3 < k < 3$$

$$6.34 \quad -2 < k < 4$$

$$6.35 \quad -\frac{5}{2} < k < \frac{3}{2}$$

$$6.36 \quad (1) H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}} \quad (2) y(n) = \frac{8}{17}(5 - 2\sqrt{2})(-1)^n$$

$$6.37 \quad y_{ss}(n) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{2} - 36.9^\circ\right)$$

$$6.38 \quad (1) y_f(n) = \left[ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} \right] U(n) \quad (2) y_f(n) = \frac{1/3}{1/3 - e^j} \left(\frac{1}{3}\right)^n U(n) - \frac{e^j}{1/3 - e^j} e^{jn} U(n)$$

$$(3) y_{ss}(n) = \sqrt{\frac{9}{10}} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 90^\circ - \tan^{-1}(-3)\right)$$

$$6.39 \quad y_{ss}(n) = 4.3 \sin\left(\frac{n\pi}{6} + 127^\circ\right)$$

$$6.40 \quad (1) y(n) - \frac{4}{5}y(n-1) = \frac{1}{5}f(n) \quad (2) y_{ss}(n) = U(n) + \frac{1}{9}\cos n\pi + 0.4\cos\left(\frac{n\pi}{6} - 52.5^\circ\right)$$

## 第7章

$$7.1 \quad H(s) = \frac{H_1(s)}{1 - H_2(s) + H_1(s) \cdot H_3(s)}$$

$$7.2 \quad H(s) = \frac{s^2}{1 + 2s^2 + 2s}$$

$$7.3 \quad H(s) = \frac{10(s+1)}{s^3 + s^2 + 20s + 10}$$

$$7.4 \quad H(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

$$7.5 \quad H(s) = \frac{H_1(s)H_2(s)[1 - H_3(s)]}{1 - H_2(s) + H_1(s)H_2(s)[1 - H_3(s)][H_4(s) + H_5(s)]}$$

$$7.6 \quad H(s) = \frac{s^2 + 4s}{s^2 + 3s + 2}$$

$$7.7 \quad H(z) = \frac{4z + 10}{z^3 + 8z^2 + 19z + 12}$$

$$7.8 \quad H(z) = \frac{2z^2 - 1}{z^3 + 4z^2 + 5z + 6}$$

$$7.9 \quad H(z) = \frac{2z^2 + 3z + 5}{z^2 + z}$$

$$7.10 \quad H(z) = \frac{2z^2 - 5}{z^4 + 20}$$

$$7.11 \quad H(z) = \frac{2z^2 - 3}{z(z+2)^2(z+3)}$$

$$7.12 \quad H(z) = \frac{4z + 10}{(z+3)(z+1)(z+4)}$$

$$7.13 \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ i'(t) \end{bmatrix}$$

$$7.14 \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} u_s(t)$$

$$7.15 \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} f(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$7.16 \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s(t) \\ u_s(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s(t) \\ u_s(t) \end{bmatrix}$$

$$7.17 \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -29 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + 2f(t)$$

$$7.18 \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -19 & -12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$7.19 \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -18 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$7.20 \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(t) \quad y(t) = \lambda_2$$

$$7.21 \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \\ \dot{\lambda}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(t) \quad y(t) = \lambda_4$$

$$7.22 \quad H(s) = \frac{s(s+1)}{s^2+s-2}$$

$$7.23 \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$7.24 \quad \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + f(t)$$

$$7.25 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad f(n) \quad \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$7.26 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \\ \lambda_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(n) \quad y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$7.27 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \\ \lambda_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(n) \quad y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$7.28 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(n) \quad y(n) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + f(n)$$

$$7.29 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(n) \quad y(n) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$7.30 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \\ \lambda_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(n) \quad y(n) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + 2f(n)$$

$$7.31 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$7.32 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}, \quad y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}$$

$$7.33 \quad (2) H(s) = \frac{1}{s+2} \quad (4) y_x(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

$$7.34 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10e^{2t} - 7e^{3t} \\ -5e^{2t} + 7e^{3t} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0$$

$$7.35 \quad (1) \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\sqrt{2})^n + (\sqrt{2})^n \\ (1+\sqrt{2})(-\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})(\sqrt{2})^n \end{bmatrix} U(n) \\ (2) y(n) - 4y(n-2) = f(n) - 4f(n-2) \quad (3) y(n) = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-2)^n, \quad n \geq 0$$

$$7.36 \quad (1) a=3, \quad b=4 \\ (2) \lambda_1(n) = [4(-1)^n - 2(-2)^n]U(n), \quad \lambda_2(n) = [4(-1)^n - 3(-2)^n]U(n)$$

$$7.37 \quad (1) \Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ e^{-2t} - e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$7.38 \quad (1) H(s) = \frac{s+2.5}{s+3}, \quad h(t) = \delta(t) - 0.5e^{-3t}U(t)$$

$$(2) \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3}(1+5e^{-3t}) \end{bmatrix}, \quad t \geq 0 \quad (3) y(t) = \frac{5}{6}(1+2e^{-3t}), \quad t \geq 0$$

$$7.39 \quad \lambda_1(0^-) = 0, \quad \lambda_2(0^-) = 1$$

$$7.40 \quad \lambda(n) = \begin{bmatrix} [(-1)^{n-1} - (-2)^{n-1}]U(n-1) \\ [(-1)^n - (-2)^n]U(n) \end{bmatrix}, \quad y(n) = [(-1)^{n+1} - (-2)^{n+1}]U(n)$$

## 附录 A 部分分式展开

在信号与系统的分析中,经常碰到以  $p, j\omega, s, z$  为变量的有理分式的展开问题,例如

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (\text{A-1})$$

式中,当  $m \geq n$  时,函数  $F(s)$  叫假分式;当  $m < n$  时,  $F(s)$  叫真分式。

任何一个有理分式,总可以分解为自变量  $s$  (或  $j\omega, z$ , 等) 的正整幂多项式与一个真分式之和,后者又能进一步展开成部分分式。例如

$$F(s) = \frac{2s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 5s}{s^2 + 4s + 3} = \underbrace{2s^2 - 4s + 15}_{\text{多项式}} - \underbrace{\frac{43s + 45}{s^2 + 4s + 3}}_{\text{真分式}} \quad (\text{A-2})$$

部分分式展开,就是讨论把有理真分式展开成一些形式上相同的简单项的线性组合时,如何确定各项系数的方法。下面分三种情况举例说明  $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  为真分式的部分分式展开。

### A.1 $F(s)$ 的 $D(s)$ 中都是单实根

先将  $D(s)$  因式分解成一阶因子,即

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n)} \quad (\text{A-3})$$

$$\text{再展开成} \quad F(s) = \frac{K_1}{s - \lambda_1} + \frac{K_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{K_j}{s - \lambda_j} + \cdots + \frac{K_n}{s - \lambda_n} \quad (\text{A-4})$$

式中,系数  $K_1, K_2, \cdots, K_j, \cdots, K_n$  用下列办法确定。因为

$$(s - \lambda_j)F(s) = \frac{K_1(s - \lambda_j)}{s - \lambda_1} + \frac{K_2(s - \lambda_j)}{s - \lambda_2} + \cdots + K_j + \cdots + \frac{K_n(s - \lambda_j)}{s - \lambda_n}$$

令  $s = \lambda_j$ , 或者  $s - \lambda_j = 0$ , 于是由

$$(s - \lambda_j)F(s) \Big|_{s=\lambda_j} = K_j \quad (\text{A-5})$$

即可分别算出  $K_1, K_2, \cdots, K_j, \cdots, K_n$  的值。例如

$$F(s) = \frac{4s + 9}{s^2 + 5s + 6} = \frac{4s + 9}{(s + 2)(s + 3)} = \frac{K_1}{s + 2} + \frac{K_2}{s + 3}$$

$$\text{其中} \quad K_1 = \frac{4s + 9}{s + 3} \Big|_{s=-2} = \frac{-8 + 9}{-2 + 3} + 1, K_2 = \frac{4s + 9}{s + 2} \Big|_{s=-3} = \frac{-12 + 9}{-3 + 2} + 3$$

$$\text{于是} \quad \frac{4s + 9}{(s + 2)(s + 3)} = \frac{1}{s + 2} + \frac{3}{s + 3}$$

### A.2 $F(s)$ 的 $D(s)$ 中有重根

$$\text{设} \quad F(s) = \frac{N(s)}{(s - \lambda_1)^r (s - \lambda_{r+1}) \cdots (s - \lambda_n)} \quad (\text{A-6})$$

容易证明,这种情况的部分分式展开式为

$$F(s) = \frac{K_1}{(s - \lambda_1)^r} + \frac{K_2}{(s - \lambda_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{K_r}{s - \lambda_1} + \frac{K_{r+1}}{s - \lambda_{r+1}} + \cdots + \frac{K_n}{s - \lambda_n} \quad (\text{A-7})$$

其中,单根  $\lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_n$  所对应项的系数  $K_{r+1}, \cdots, K_n$  用式(A-5) 计算,重根  $\lambda_1$  对应项的系数  $K_1, K_2, \cdots, K_r$  按如下公式计算

$$\begin{aligned} K_1 &= (s - \lambda_1)^r \cdot F(s) \Big|_{s=\lambda_1} \\ K_2 &= \frac{d}{ds} \{ (s - \lambda_1)^r \cdot F(s) \} \Big|_{s=\lambda_1} \\ \text{其一般项系数} \quad K_j &= \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \{ (s - \lambda_1)^r \cdot F(s) \} \Big|_{s=\lambda_1} \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

式(A-8)的证明不难,因为由式(A-7)已知

$$\begin{aligned} (s - \lambda_1)^r \cdot F(s) &= K_1 + K_2(s - \lambda_1) + K_3(s - \lambda_1)^2 + \cdots + K_r(s - \lambda_1)^{r-1} + \\ &\quad \frac{K_{r+1}(s - \lambda_1)^r}{s - \lambda_{r+1}} + \cdots + K_n \frac{(s - \lambda_1)^r}{s - \lambda_n} \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

因此,分别对式(A-9)求零至  $(r-1)$  阶导数并令  $s = \lambda_1$ ,即可证明式(A-8)。

例如

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{4s^3 + 16s^2 + 23s + 13}{(s+1)^3(s+2)} \\ &= \frac{K_1}{(s+1)^3} + \frac{K_2}{(s+1)^2} + \frac{K_3}{s+1} + \frac{K_4}{s+2} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{4s^3 + 16s^2 + 23s + 13}{s+2} \Big|_{s=-1} = 2 \\ K_4 &= \frac{4s^3 + 16s^2 + 23s + 13}{(s+1)^3} \Big|_{s=-2} = 1 \\ K_2 &= \frac{d}{ds} \left[ \frac{4s^3 + 16s^2 + 23s + 13}{s+2} \right]_{s=-1} \\ &= \left\{ \frac{(s+2)[2s^2 + 32s + 23] - 4s^3 - 16s^2 - 23s - 13}{(s+2)^2} \right\}_{s=-1} = 1 \\ K_3 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{4s^3 + 16s^2 + 23s + 13}{s+2} \right]_{s=-1} = 3 \end{aligned}$$

即

$$F(s) = \frac{4s^3 + 16s^2 + 23s + 13}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

### A.3 $F(s)$ 的 $D(s)$ 中有共轭复根

由于  $F(s)$  是有理分式,所以如果  $F(s)$  中有复数极点,则必定共轭成对出现。这种情况的展开,可仿照式(A-4)、式(A-5)进行,只不过复数根对应项的系数也必然为复数且共轭成对出现(否则  $F(s)$  不会是有理分式)。也可以用如下办法展开成具有二次项作为分母的组合。例如

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s^2 + 2s + 2)(s+1)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2s + K_3}{s^2 + 2s + 2} \quad (\text{A-10})$$

其中

$$K_1 = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 2} \Big|_{s=-1} = 1$$

将  $K_1 = 1$  代入式(A-10)并通分相加得

$$\frac{s^2 + s + 1}{(s^2 + 2s + 2)(s+1)} = \frac{(s^2 + 2s + 2) + K_2s^2 + (K_2 + K_3)s + K_3}{(s^2 + 2s + 2)(s+1)}$$

$$= \frac{(1+K_2)s^2 + (2+K_2+K_3)s + (2+K_3)}{(s^2+2s+2)(s+1)}$$

比较等式两端分子的对应项,即可确定  $K_3 = -1, K_2 = 0$ 。于是

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{(s+1)^2+1}$$

这种展开办法在求解逆拉氏变换中十分简便。容易看出,如果

$$F(s) = \frac{s^2+s+1}{(s^2+2s+2)(s+1)}, \quad \sigma: (-1, \infty)$$

则

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}, \quad \sigma: (-1, \infty)$$

于是

$$f(t) = e^{-t}U(t) - e^{-t} \sin t U(t)$$

必须注意,上述三种展开式求系数的公式,仅仅对  $F(s)$  是真分式时才适用。如果给定的  $F(s)$  是假分式,必须先将  $F(s)$  转换成  $s$  的正整幂多项式和一个真分式之后再行展开。

## 附录 B 卷积分表

序号	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t) * f_2(t)$
1	$f(t)$	$\delta'(t)$	$f'(t)$
2	$f(t)$	$\delta(t)$	$f(t)$
3	$f(t)$	$U(t)$	$\int_{-\infty}^t f(\lambda) d\lambda$
4	$U(t)$	$U(t)$	$tU(t)$
5	$tU(t)$	$U(t)$	$\frac{1}{2}t^2U(t)$
6	$e^{-\alpha t}U(t)$	$U(t)$	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})U(t)$
7	$e^{-\alpha_1 t}U(t)$	$e^{-\alpha_2 t}U(t)$	$\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t})U(t), \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$
8	$e^{-\alpha t}U(t)$	$e^{-\alpha t}U(t)$	$te^{-\alpha t}U(t)$
9	$tU(t)$	$e^{-\alpha t}U(t)$	$\left(\frac{\alpha t - 1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha t}\right)U(t)$
10	$te^{-\alpha_1 t}U(t)$	$e^{-\alpha_2 t}U(t)$	$\left[\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)t - 1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}e^{-\alpha_1 t} + \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}e^{-\alpha_2 t}\right]U(t)$ $\alpha_1 \neq \alpha_2$
11	$te^{-\alpha t}U(t)$	$e^{-\alpha t}U(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{-\alpha t}U(t)$

## 附录 C 常用周期信号的傅里叶系数表

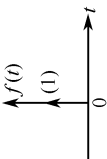
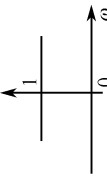
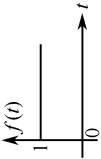
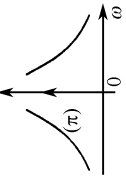
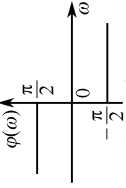
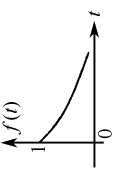
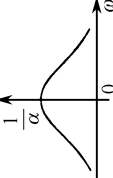
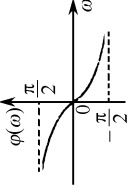
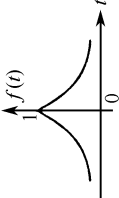
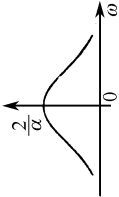
名 称	信 号 波 形	傅里叶系数 $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$
矩形脉冲		$\frac{a_0}{2} = \frac{\tau}{T}$ $a_n = \frac{2\sin\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$ $b_n = 0$
方 波		$a_n = 0,$ $b_n = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad \text{或 } b_n = \frac{4}{n\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
锯齿波		$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$ $a_n = 0$ $b_n = \frac{1}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
		$a_n = 0$ $b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
三角脉冲		$\frac{a_0}{2} = \frac{\tau}{2T}$ $a_n = \frac{4T}{\tau} \cdot \frac{1}{(n\pi)^2} \sin^2\left(\frac{n\omega_0\tau}{4}\right)$
三 角 波		$a_n = 0$ $b_n = \frac{8}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
半波余弦		$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}$ $a_n = \frac{-2}{\pi(n^2 - 1)} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ $b_n = 0$
全波余弦		$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$ $a_n = -\frac{4}{\pi(n^2 - 1)} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ $b_n = 0$



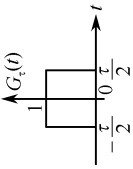
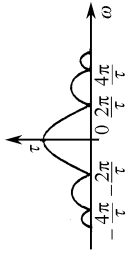
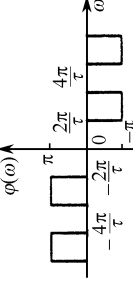
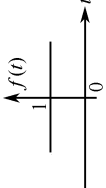
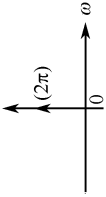
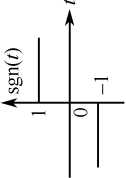
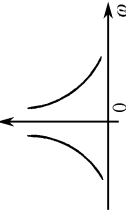
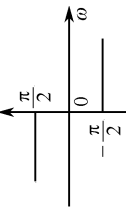
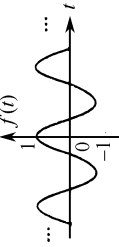
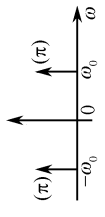
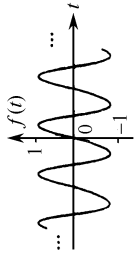
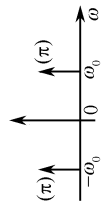
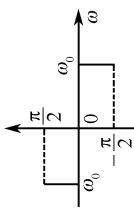
## 附录 D 常用序列单、双边 $z$ 变换对

序号	$f(n)$	单边 $z$ 变换			双边 $z$ 变换
		象函数 $F(z)$	收敛域	象函数 $F_b(z)$	收敛域
1	$\delta(n)$	1	全平面	1	全平面
2	$U(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$ z  > 1$	$\frac{z}{z-1}$	$ z  > 1$
3	$(a)^n U(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$ z  >  a $	$\frac{z}{z-a}$	$ z  >  a $
4	$nU(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z  > 1$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ a  > 1$
5	$n(a)^{n-1} U(n)$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$ z  >  a $	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$ z  >  a $
6	$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} (a)^{n-m} U(n), m \geq 1$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$ z  >  a $	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$ z  >  a $
7	$\delta(n-m), m > 0$	$z^{-m}$	$ z  > 0$	$z^{-m}$	$ z  > 0$
8	$-U(-n-1)$	—	—	$\frac{z}{z-1}$	$ z  < 1$
9	$-(a)^n U(-n-1)$	—	—	$\frac{z}{z-a}$	$ z  <  a $
10	$-nU(-n-1)$	—	—	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z  < 1$
11	$-n(a)^{n-1} U(-n-1)$	—	—	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$ z  <  a $
12	$\frac{-n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} (a)^{n-m} U(-n-1), m \geq 1$	—	—	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$ z  <  a $
13	$\delta(n+m), m > 0$	—	—	$z^m$	$ z  < \infty$
14	$(a)^n U(n) - (b)^n U(-n-1),  b  >  a $	$\frac{z}{z-a}$	$ z  >  a $	$\frac{2z^2 - (a+b)z}{(z-a)(z-b)}$	$ a  <  z  <  b $

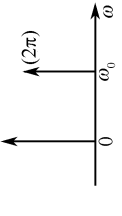
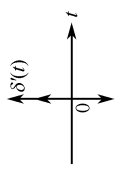
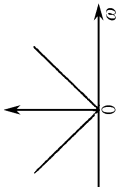
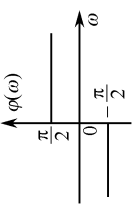
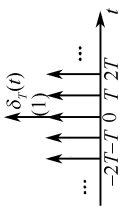
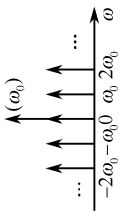
附录 E 常用信号的傅里叶变换及其频谱图

序号	信号名称	时间函数	波形	频谱函数 $F(j\omega)$	幅度 $ F(j\omega) $	相位谱 $\varphi(\omega)$
1	单位冲激	$\delta(t)$		1		$\varphi(\omega) = 0$
2	单位阶跃	$U(t)$		$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$		
3	单边指数	$e^{-at}U(t)$ ( $a > 0$ )		$\frac{1}{\alpha + j\omega}$		
4	双边指数	$e^{-a t }$ ( $a > 0$ )		$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$		$\varphi(\omega) = 0$

(续表)

序号	信号名称	时间函数	波形	频谱函数 $F(j\omega)$	幅度谱 $ F(j\omega) $	相位谱 $\varphi(\omega)$
5	矩形脉冲	$G_{\tau}(t) = \begin{cases} 1, &  t  < \frac{\tau}{2} \\ 0, &  t  > \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$		
6	单位直流	1		$2\pi\delta(\omega)$		$\varphi(\omega) = 0$
7	符号函数	$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$		$\frac{2}{j\omega}$		
8	周期余弦	$\cos\omega_0 t$		$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$		$\varphi(\omega) = 0$
9	周期正弦	$\sin\omega_0 t$		$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$		

(续表)

序号	信号名称	时间函数	波形	频谱函数 $F(j\omega)$	幅度谱 $ F(j\omega) $	相位谱 $\varphi(\omega)$
10	周期复指数函数	$e^{j\omega_0 t}$	...	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$		$\varphi(\omega) = 0$
11	冲激偶	$\delta'(t)$		$j\omega$		
12	周期冲激序列	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$		$\omega_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$		$\varphi(\omega) = 0$
13	周期信号 (满足狄氏条件)	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$ $F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, T$ 为周期	...	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_0)$	...	...

说明：为便于读者记忆，本表列出了最常用函数的傅里叶变换对。还有一些函数，如  $\text{Sa}(bt)$ ， $|t|$ ， $t$ ， $\frac{1}{t}$  等，可由表中给出的变换对，结合傅里叶变换的性质求得。

# 参 考 文 献

- [1] 郑君里,应启珩,杨为理. 信号与系统(第二版). 北京:高等教育出版社,2000
- [2] 吴大正,杨林耀,张永瑞. 信号与线性系统分析(第三版). 北京:高等教育出版社,1998
- [3] 陈后金,胡健,薛健. 信号与系统. 北京:清华大学出版社,2003
- [4] 胡光锐. 信号与系统. 上海:上海交通大学出版社,1999
- [5] Alan V. Oppenheim 等. 刘树棠译. 信号与系统(第二版). 西安:西安交通大学出版社,1998
- [6] Gordon E. Carlson. 曾朝阳等译. 信号与线性系统(第二版). 北京:机械工业出版社,2004
- [7] Simon Haykin, Barry Van Veen. 林秩盛等译. 信号与系统(第二版). 北京:电子工业出版社,2004
- [8] 张谨,赫兹辉. 信号与系统. 北京:人民邮电出版社,1985
- [9] 闵大镒,朱学勇. 信号与系统. 成都:电子科技大学出版社,1998
- [10] Edward W. Kamen, Bonnie S. Heck. Fundamentals of Signals and Systems Using the Web and MATLAB. 北京:科学出版社,2002
- [11] Vinay K. Ingle, John G. Proakis. 陈怀琛,王朝英等译. 数字信号处理及其 MATLAB 实现. 北京:电子工业出版社,1998
- [12] 董长虹,余海嘯,高威等. MATLAB 信号处理与应用. 北京:国防工业出版社,2005
- [13] 陈亚勇等. MATLAB 信号处理详解. 北京:人民邮电出版社,2001
- [14] 罗军辉,罗勇江,白义臣等. MATLAB 7.0 在数字信号处理中的应用. 北京:机械工业出版社,2005
- [15] 陈怀琛. MATLAB 及其在理工课程中的应用指南. 西安:西安电子科技大学出版社,2000
- [16] 邹鲲,袁俊泉,龚享铤. MATLAB 6. x 信号处理. 北京:清华大学出版社,2002
- [17] 阮沈勇,王永利,桑群芳. MATLAB 程序设计. 北京:科学出版社,2004
- [18] 张永瑞. 电路、信号与系统辅导. 西安:西安电子科技大学出版社,2001
- [19] 范世贵等. 信号与系统常见题型解释及模拟题. 西安:西北工业大学出版社,2000
- [20] 陈后金,胡健,薛健等. 信号与系统学习指导及习题精解. 北京:清华大学出版社,2003

# 反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可,复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为;歪曲、篡改、剽窃本作品的行为,均违反《中华人民共和国著作权法》,其行为人应承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序,保护权利人的合法权益,我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为,本社将奖励举报有功人员,并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话:(010)88254396;(010)88258888

传 真:(010)88254397

E-mail: dbqq@phei.com.cn

通信地址:北京市万寿路173信箱











电子工业出版社总编办公室

邮 编:100036

## 高等学校“电气信息类”精品教材、优秀畅销教材

书 号	书 名	作 者	奖项、教辅	
09191	电路分析基础教程	燕庆明		电子课件
09710	电路分析基础(第2版)	周 茜		电子课件
08925	电路分析(第2版)	刘 健		电子课件
12363	电工与电子技术	毕淑娥		电子课件
13538	电工技术基础(第2版)	黄锦安		省精品课程、电子课件
09902	信号与系统(第3版)	王宝祥		
06239	信号与系统(第3版)	徐天成		电子课件
13539	信号与系统(第3版)	徐亚宁		
09194	数字信号处理原理及其 MATLAB 实现(第2版)	丛玉良		电子课件、习题解答
10764	数字信号处理——原理、实现及应用(第2版)	高西全 丁玉美		省精品课程、电子课件、程序集、配套辅导书
04928	数字信号处理学习指导与习题解答	丁玉美		
11173	数字信号处理	刘兴钊		电子课件、习题解答
即将出版	数字信号与系统——新视野数字信号处理教程	韦 岗		国家精品课程
07991	信号分析与处理	燕庆明		电子课件
10625	模拟电子技术基础(第2版)	王卫东		省精品课程、电子课件
06390	模拟电路与数字电路(第2版)	寇 戈		国家精品教材、电子课件
06379	数字逻辑电路与系统设计	蒋立平		国家精品课程、电子课件、习题解答
10672	数字逻辑电路基础	江国强		电子课件、习题解答
09152	数字电子技术基础教程	夏路易		电子课件、习题解答
08235	高频电子电路(第2版)	王卫东		电子课件、EWB 仿真、习题解答
10863	通信电路基础(第2版)	沈 琴		电子课件、习题解答
06210	现代模拟集成电路原理及应用	王卫东		电子课件
05697	电子线路设计·实验·测试(第4版)	谢自美		国家精品课程、课程网站
即将出版	射频电路设计	褚庆昕		国家精品课程、课程网站
13638	电磁兼容原理与技术	赵家升		
03278	随机过程理论(第2版)	周荫清		电子课件、配套习题集
03628	随机信号分析(第3版)	李晓峰		电子课件
07668	随机信号分析基础(第3版)	王永德		
13571	随机信号分析(第2版)	赵淑清		
10067	离散信号检测与估计	马淑芬		电子课件、习题解答
06583	通信原理教程(第2版)	樊昌信		国家精品课程、电子课件、配套辅导书、配套英文版教材
10959	通信原理(英文版)	樊昌信		
03861	通信原理学习指导与习题解答	郭爱煌		
08025	现代通信原理与技术	王兴亮		国家精品课程、电子课件
即将出版	通信原理大学教程	曹丽娜		国家精品课程
04373	通信系统建模与仿真	韦 岗		

<sup>1</sup> 普通高等教育“十一五”国家级规划教材

书 号	书 名	作 者	奖项、教辅	
06850	移动通信基础(第2版)	杨家玮		电子课件
13606	移动通信原理	啜钢		电子课件
08644	卫星通信导论(第3版)	朱立东		电子课件
即将出版	通信系统概论(第2版)	章坚武		
11600	现代交换原理与技术(第2版)	罗国明		电子课件
07595	光纤通信(第2版)	王 辉		电子课件
08252	雷达原理(第4版)	丁鹭飞		国家重点教材、电子课件
06384	数据通信与网络	李文海		电子课件
09126	接入网技术概论	王兴亮		电子课件
12230	信息传输技术原理及应用	张树京		电子课件
11902	电子科学与技术导论(第2版)	李哲英		电子课件
即将出版	语音信号处理(第3版)	胡 航		电子课件
即将出版	数字语音编码	姚天任		
即将出版	微波技术基础教程	闫润卿		
03970	电子测量技术(第2版)	林占江		电子课件、习题解答
10675	电子测量实验教程	林占江		
12231	电子测量基础	孙 续		
04880	现代微机原理与接口技术(第2版)	杨全胜		
12229	微机原理与接口技术	张颖超		
10481	单片机原理及应用——基于51与高速SoC51	夏路易		电子课件
05131	计算机网络简明教程	谢希仁		电子课件
即将出版	DSP 原理及应用基础	张雄伟		电子课件
12704	PLC 技术实用教程——西门子S7-300	弭洪涛		省精品课程、电子课件
08826	MATLAB 及在电子信息类课程中的应用(第2版)	唐向宏		电子课件
05348	计算机仿真技术与CAD—— 基于MATLAB的控制系统(第2版)	李国勇		电子课件
07955	人工智能及其应用	李国勇		电子课件
09876	可编程控制器技术	齐 蓉		省精品课程、课程网站
即将出版	控制工程基础	王 敏		省精品课程
06336	物理光学(第3版)	梁铨廷		电子课件、 配套辅导书
11919	物理光学简明教程	梁铨廷		
07694	物理光学学习指导与题解	刘翠红		
06582	光电技术(第2版)	王庆有		电子课件
07179	激光原理及应用(第2版)	陈家璧		电子课件、习题解答
06917	应用光学(第3版)	张以谟		
08624	光电信息物理基础	沈为民		电子课件
08719	光电检测技术与系统	高稚允		电子课件
12057	信息光学原理	苏显渝		电子课件
12190	光电信息综合实验与设计教程	王庆有		
即将出版	光电信息科学与工程专业英语教程	张 彬		
13537	光学薄膜技术(第2版)	卢进军		电子课件

教材服务与教辅支持,请垂询:010-88254532 (Tel), Email:wangrh@phei.com.cn,  
更多教材、教辅信息请登录华信教育资源网 www.hxedu.com.cn